וקטורים – בגישה משולבת
שאלון 035807
חלק א

ד"ר נעמי צ'יזיק

תשע"ז

מפגש 1 נצרת עילית

תוכנית ההשתלמות

ראשי פרקים מרכזיים בהשתלמות	
נושאים בסיסיים בהנדסת המרחב. פעולות בסיסיות בוקטורים. תרגול והדגשים.	
יישומים. יחידות ההצגה. שימושים במרחב.	
מכפלה סקלרית, שימושים במישור ובמרחב.	
המרחב התלת ממדי. מצבים הדדיים. חישובים במרחב.	
מפגש וירטואלי – הגשת משימה	

ספרי לימוד מומלצים:

וקטורים / ד"ר אורי רימון, פרופ' שמשון עמיצור. הוצאת המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית.

דרכים בהוראת המתמטיקה / נעמי צ'ייזיק. הוצאת אורט ישראל, עמ' 187-240.

מתמטיקה לחטיבה העליונה – אלגברה (תרגילים בוקטורים עם פתרונות מלאים) / מיכאל קרייזמן. הוצאת המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית.

<u>אוסף יישומים, דרך מרכז מורים ארצי:</u>

http://tube.geogebra.org/book/title/id/1047209

אוסף פעילויות להצגה והמחשה של וקטורים – נטפל בהמשך.

http://www.cabrillo.edu/~jmccullough/Applets/Flash.html

אוסף פעילויות להצגה והמחשה של וקטורים – נטפל בהמשך.

קואורדינטות ומישורים במרחב

משוואת המישור התבניתית (אלגברית):

$$\boxed{ax+by+cz=d}$$

<u>כהרחבה של הצגת הישר במישור</u>

$$ax+by=c$$

$$ax+by+cz=d$$

$$d=1 \qquad d=0$$

קביעת משוואת המישור התבניתית

דוגמאות :

1. א. דוגמה במישור : מצאו את משוואת הישר העובר בנקודות : (12,9) (4,3)

ב. מצאו את משוואת המישור העובר בנקודות : (0,0,1/3) (1,2,2) (1,1,1)

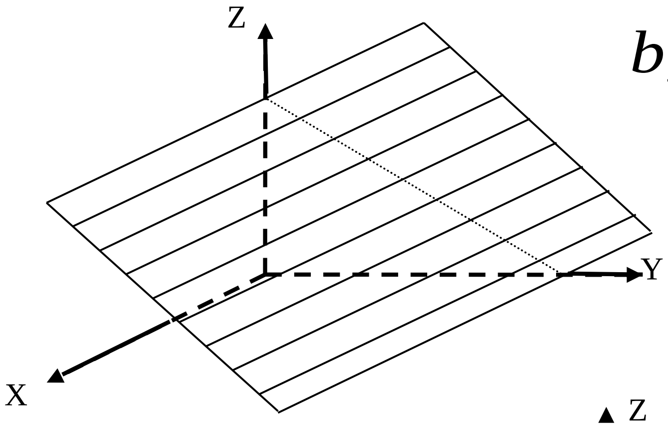
2. האם הנקודות (0,0,1) (1,1,2) (1,-1,1) (0,2,3) נמצאות על מישור אחד?

הראו 2 דרכים לפתרון.

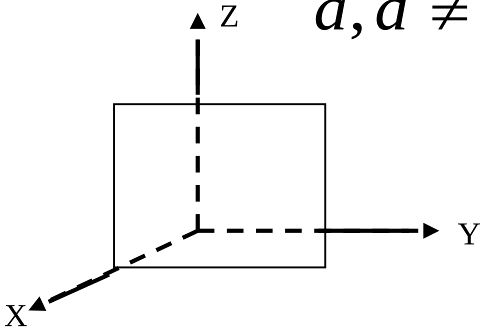
מקרים פרטיים של משוואת מישור תבניתית...

מקרה א - $ax+by+cz=0$ $\quad a,b,c\neq 0$

מקרה ב - $0x+by+cz=d$ $\quad b,c,d\neq 0$



מקרה ג - $ax+0y+0z=d$ $\quad a,d\neq 0$

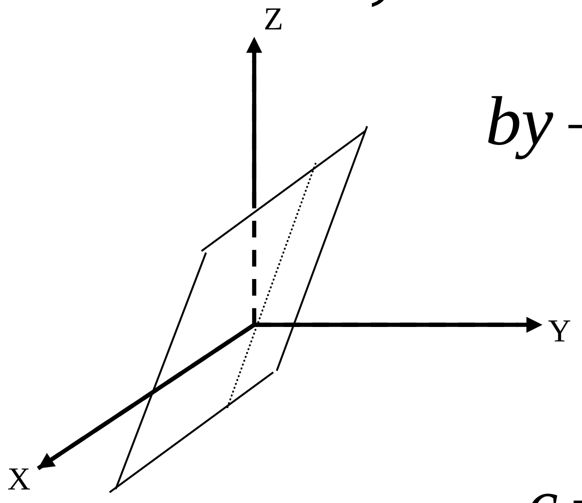


...ועוד

<u>מקרה ד -</u>

$$0x+by+cz=0 \qquad b,c\neq 0$$

$$by+cz=0 \qquad y=-\frac{c}{b}z$$



<u>מקרה ה -</u>

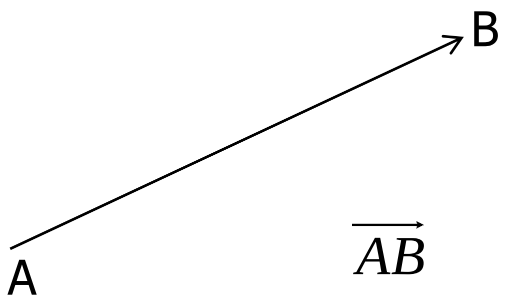
$$0x+0y+cz=0 \qquad c\neq 0$$

[נקודה / וקטור במרחב](#)

וקטור, בהצגתו האלגברית, הוא **n-יה** של מספרים בסדר מסוים,

$$\left(a_1, a_2, a_3, ..., a_n\right)$$

$$\underline{a} = \left(a_1, a_2\right)$$



$$\overrightarrow{AB}$$

$$\underline{u}$$

שיוויון וקטורים

אלגברי

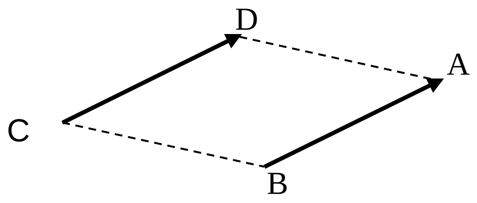
$$\underline{a} = \underline{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$$ לכל i

"הזזה"

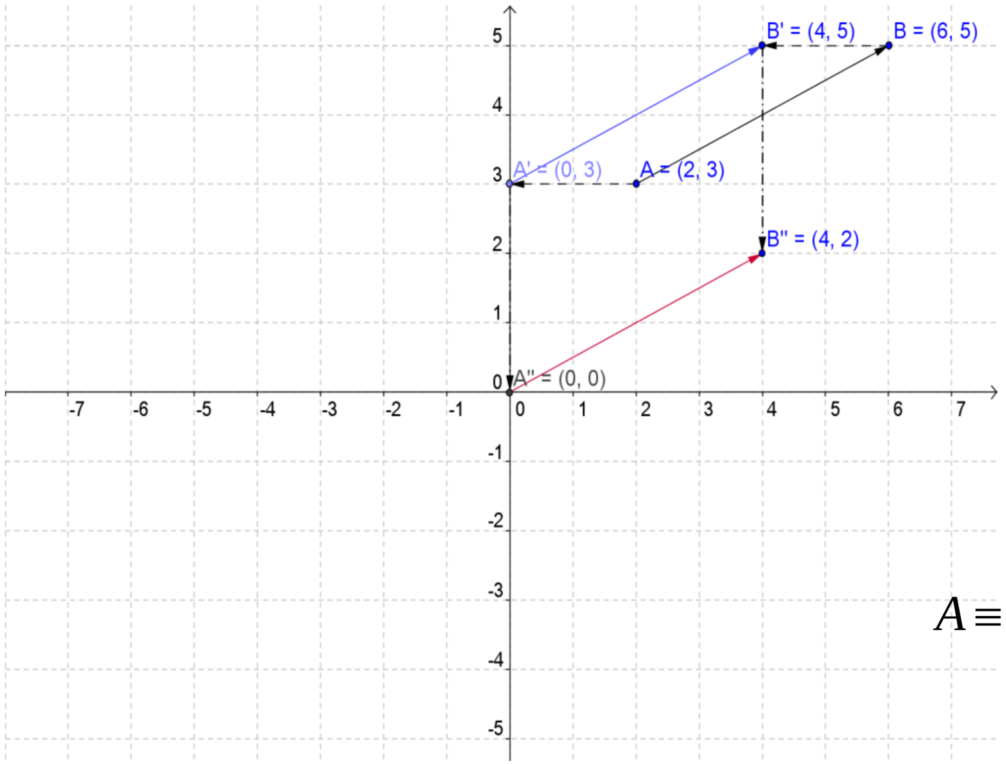
$$\underline{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$A \equiv (a_1, a_2) \quad B \equiv (b_1, b_2) \;\Rightarrow\; C = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

גיאומטרי



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$



חיבור וקטורים

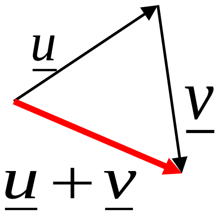
אלגברי

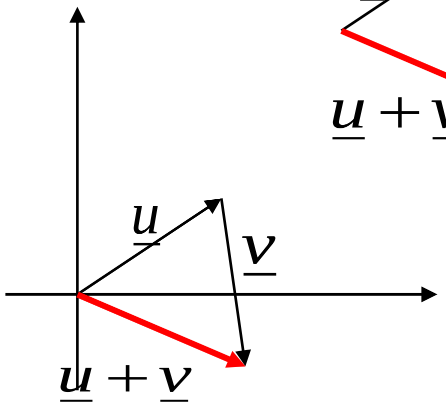
$$\left(a_1,a_2\right)+\left(b_1,b_2\right)=\left(a_1+b_1,a_2+b_2\right)$$

$$\underline{u}=(4,3)\quad \underline{v}=(1,-5)$$

$$\underline{u}+\underline{v}=(5,-2)$$

גיאומטרי





שיטת המקבילית

[חיבור וקטורים]

http://tube.geogebra.org/book/title/id/1047209
אוסף פעילויות להצגה והמחשה של וקטורים

1.

1. כדור פורח
2. סכום וקטורים

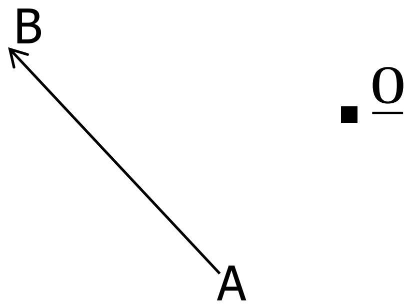
דיון

לפעולת חיבור הוקטורים מספר תכונות. נבצע את **ההוכחות / הסברים**, בהצגה אלגברית מול הצגה גיאומטרית:

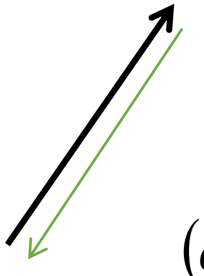
סגירות ← **אנלוגיה לקבוצות מספרים**

איבר ניטרלי (וקטור האפס, $\underline{O}$)

$$(a,b,c)+(0,0,0)=(a,b,c)$$



איבר נגדי



$$(a,b)+(x,y)=(0,0)$$
$$(a+x,b+y)=(0,0)$$
$$x=-a \qquad y=-b$$

חוק החילוף בחיבור וקטורים

$$\underline{a}+\underline{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)= \quad (a_1+b_1,a_2+b_2)=$$

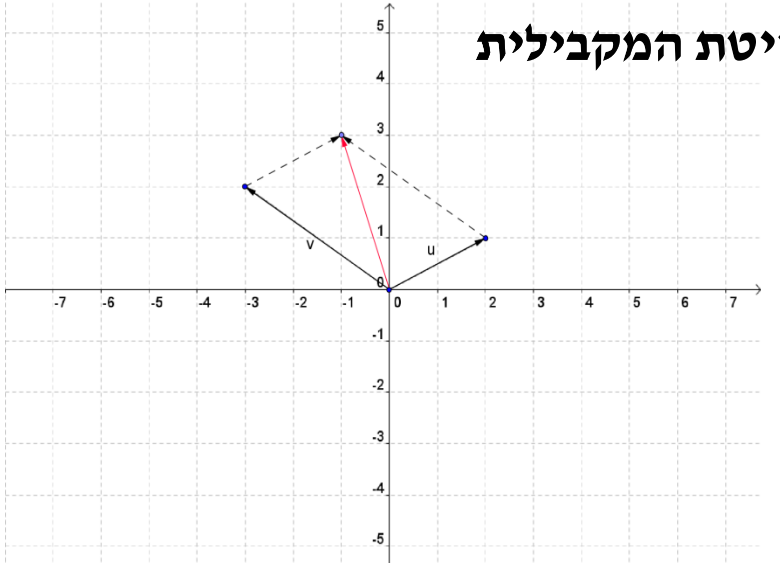
לפי חוק חיבור וקטורים

לפי חוק החילוף בחיבור מספרים

$$(b_1+a_1,b_2+a_2)= \quad \underline{b}+\underline{a}$$

לפי חוק חיבור וקטורים

שיטת המקבילית



חוק הקיבוץ: $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

הוכיחו אלגברית! הדגימו גאומטרית בג'אוג'ברה.

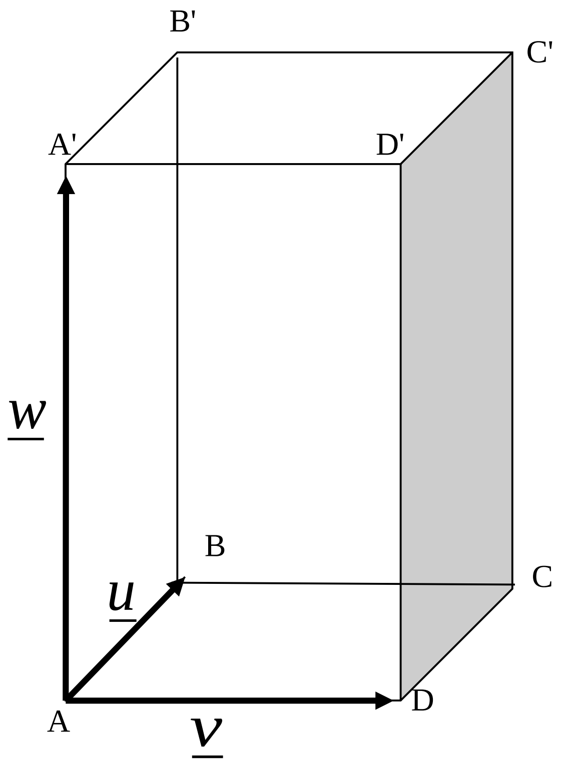
חיסור וקטורים נגזר מהגדרת האיבר הנגדי לפעולת החיבור.

http://www.cabrillo.edu/~jmccullough/Applets/Flash.html

<u>דוגמה</u>

בתיבה ’ABCDA'B'C'D שבציור נסמן:

$$\overrightarrow{AB}=\underline{u} \quad \overrightarrow{AD}=\underline{v} \quad \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$$



הבע את אלכסוני התיבה בעזרת וקטורים אלה.

$$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}=\underline{w}+\underline{v}-\underline{u} \quad *$$

$$=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$$

<u>דוגמה</u>

(מתוך : אלגברה 5 יח׳, תרגילים בוקטורים / קרייזמן וצחור, עמ׳ 9)

תהיינה A, B, C ו-D ארבע נקודות במרחב. הוכח כי אם קיימת נקודה Q המקיימת :

$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}$ אז : ABCD מקבילית.

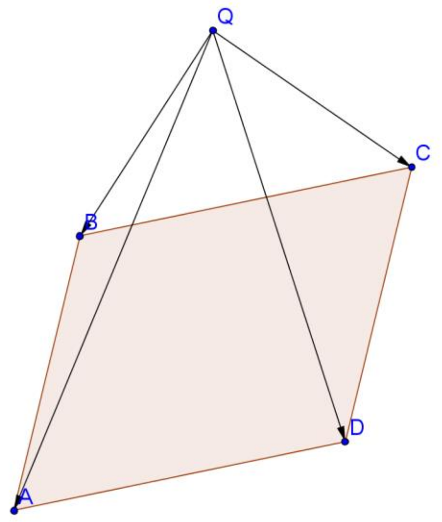
משפט הפוך :

הוכח כי אם ABCD מקבילית אז לכל נקודה Q במרחב מתקיים : $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}$

$$\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{QC}$$

$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{CQ}$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$$



$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QD}$$

כפל וקטור בסקלר

אלגברי

הגדרת הפעולה

גיאומטרי

t סקלר.

$$\underline{u}=\left(u_1,u_2\right)\quad\Rightarrow\quad t\underline{u}=\left(tu_1,tu_2\right)$$

כפל וקטור גיאומטרי בסקלר מאריך/מקצר את הוקטור פי |t|. הכיוון יישמר כש-t חיובי, ויתהפך כש-t שלילי.