בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ"ד, מועד א' -פתרון

5.9.2024, ב' באלול התשפ"ד

מרצים: אחיה בר-און, שמעון ברוקס, דורון פרלמן, ארז שיינר.
מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, רועי רונן.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהא U קבוצה ותהיינה $A, B \subseteq U$. לכל תת קבוצה $X \subseteq U$ נסמן את המשלים $X^c = U \backslash X$. בנוסף, לכל שתי קבוצות S_1, S_2 נסמן את ההפרש הסימטרי $S_1 \triangle S_2$ להיות הקבוצה $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1)$.
הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) $(A \triangle B)^c = A \cap B$.

פתרון: הפרכה: ניקח $U = \{1, 2\}$ ו $A = B = \{1\}$. מתקיים כי

$$(A \triangle B)^c = \emptyset^c = U = \{1, 2\}$$

ואילו

$$A \cap B = \{1\}$$

והן אינן שוות.

(ב) $P(A \triangle B) \neq P(A) \triangle P(B)$.

פתרון: הוכחה: כיוון ש $\emptyset$ נמצאת בכל קבוצת חזקה נקבל כי $\emptyset \in P(A \triangle B)$ ומצד שני

$$\emptyset \notin P(A) \triangle P(B)$$

שהרי $\emptyset \in P(A), P(B)$.

(ג) $A \backslash B = B^c \backslash A^c$.

פתרון: הוכחה:

$$A \backslash B = A \cap B^c = B^c \cap A = B^c \backslash A^c$$

2. (9 נקודות כל סעיף) נגדיר יחס R על $\mathbb{Z}$ על ידי הכלל

$$aRb \iff \exists c \in \mathbb{Z} : \ a^2 - b^2 = 3c$$

(א) הוכיחו כי R יחס שקילות על $\mathbb{Z}$.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: יהא a שלם. מתקיים כי $a^2 - a^2 = 0 = 3 \cdot 0$ ולכן aRa.
- סימטרי: יהיו a, b שלמים כך ש aRb. צ"ל bRa. מכך ש aRb נסיק כי

$$\exists c \in \mathbb{Z}: \ \ a^2 - b^2 = 3c$$

ולכן

$$b^2 - a^2 = -3c = 3\left(-c\right)$$

ומכיוון ש c שלם, גם $-c$ שלם. מכאן ש bRa כנדרש.

- טרנזיטיבי: יהיו a, b, c שלמים כך ש aRb ו bRc. צ"ל aRc. מכך ש aRb ו bRc נסיק ש

$$\exists d \in \mathbb{Z}: \ \ a^2 - b^2 = 3d$$

וגם

$$\exists e \in \mathbb{Z}: \ \ b^2 - c^2 = 3e$$

ולכן

$$a^2 - c^2 = a^2 - b^2 + b^2 - c^2 = 3d + 3e = 3\left(d + e\right)$$

ומכיוון ש d, e שלמים גם $d + e$ שלם. מכאן ש aRc כנדרש.

(ב) הוכיחו כי $\mathbb{Z} = [0]_R \cup [1]_R$ (כאשר $[x]_R$ היא מחלקת השקילות של x). רמז: מותר להשתמש בכך שכל מספר שלם הוא מהצורה $3n + k$ עבור איזה שהוא n שלם ו $k \in \{0, 1, 2\}$.

פתרון: נוכיח שלכל x שלם מתקיים $x \in [0]_R \cup [1]_R$ (זה מוכיח את ההכלה $\mathbb{Z} \subseteq [0]_R \cup [1]_R$. ההכלה בכיוון השני ברורה שהרי כל מחלקת שקילות $[x]_R$ מוכלת ב $\mathbb{Z}$). יהא x שלם. קיימים n שלם ו $k \in \{0, 1, 2\}$ כך ש $x = 3n + k$. נחלק:

- אם $k = 0$: נקבל ש $x = 3n$ ואז $x^2 - 0^2 = 9n^2 = 3 \cdot \left(3n^2\right)$. לכן $xR0$ ולכן $x \in [0]_R$.
- אם $k = 1$: נקבל ש $x = 3n + 1$ ואז

$$x^2 - 1^2 = \left(3n + 1\right)^2 - 1 = 9n^2 + 6n = 3 \cdot \left(3n^2 + 2n\right)$$

ולכן $xR1$ ולכן $x \in [1]_R$.

- אם $k=2$: נקבל ש $x=3n+2$ ואז

$$x^2-1^2=(3n+2)^2-1=9n^2+12n+3=3\cdot\left(3n^2+4n+1\right)$$

ולכן $xR1$ ולכן $x\in[1]_R$.

3. הגדרה: לכל x ממשי מגדירים את $\lfloor x\rfloor$, הערך השלם התחתון של x, להיות

$$\lfloor x\rfloor=\max\{z\in\mathbb{Z}\mid z\leq x\}$$

כלומר: המספר השלם הכי גדול שמקיים שהוא קטן שווה מ x. למשל $\lfloor 3.1\rfloor=3$.

נגדיר יחס T על $\mathbb{R}$ על ידי הכלל

$$xTy \iff (x=y)\vee(\lfloor x\rfloor<\lfloor y\rfloor)$$

ענו על הבאים:

(א) (7 נקודות) הוכיחו כי T יחס סדר חלקי על $\mathbb{R}$.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: יהא a ממשי. מתקיים כי $a=a$ ולכן aTa.
- אנטי-סימטרי: יהיו a,b ממשיים כך ש aTb וגם bTa. צ"ל $a=b$. נב"ש כי $a\neq b$. מכך ש aTb וגם bTa (בצירוף ש $a\neq b$) נסיק כי

$$\lfloor a\rfloor<\lfloor b\rfloor$$

וגם

$$\lfloor b\rfloor<\lfloor a\rfloor$$

וזה סתירה כי $\lfloor a\rfloor,\lfloor b\rfloor$ מספרים שלמים.
- טרנזיטיבי: יהיו a,b,c ממשיים כך ש aTb ו bTc. צ"ל aRc.
  - אם $a=b$ אז bTc הוא פשוט aTc וסיימנו.
  - אם $b=c$ אז aTb הוא פשוט aTc וסיימנו.
  - אחרת, $a\neq b$ וגם $b\neq c$ ומכך ש aTb ו bTc נסיק ש

$$\lfloor a\rfloor<\lfloor b\rfloor$$

וגם

$$\lfloor b \rfloor < \lfloor c \rfloor$$

ולכן

$$\lfloor a \rfloor < \lfloor c \rfloor$$

ולכן aTc כנדרש.

(ב) (7 נקודות) האם T יחס סדר משווה/מלא/לינארי (כל אחד והמינוח שראה בהרצאה)? הוכיחו תשובתכם.

פתרון: הוא לא יחס משווה שהרי עבור $a = 1.1, b = 1.2$ מתקיים $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 1$ ולכן $(a,b) \notin T$ וגם $(b,a) \notin T$ ולכן a,b לא ניתנים להשוואה.

(ג) (4 נקודות כל תת סעיף) עבור הקטע $B = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ הוכיחו או הפריכו:

i. קיים $\sup B$.

פתרון: טענה: $\sup B = 1$. הוכחה: נראה שהוא חסם מלעיל של B ושהוא החסם המלעיל הכי קטן.

- לכל $x \in [0,1)$ מתקיים כי $\lfloor x \rfloor = 0 < 1 = \lfloor 1 \rfloor$ ולכן $(x,1) \in T$. בנוסף $(1,1) \in T$ ולכן: לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $(x,1) \in T$ ולכן 1 חסם מלעיל (מלמעלה) של B.
- יהא c חסם מלעיל של B בפרט, כיוון ש $1 \in B$ נסיק ש $(1,c) \in T$ ובפרט 1 קטן יותר מ c. מכאן ש 1 חסם מלעיל של B הכי קטן .

ii. קיים $\inf B$.

פתרון: טענה: לא קיים $\inf B$. הוכחה: נב"ש שקיים $\inf B$. נסמנו m. בפרט m חסם מלרע של B ולכן (כיוון ש $0 \in B$) נסיק כי $(m,0) \in T$ לכן

$$(m = 0) \vee (\lfloor m \rfloor < \lfloor 0 \rfloor)$$

כעת:

- אם $m = 0$ נקבל כי $(0, 0.5) \in T$ (שהרי $m = 0$ חסם מלרע של B ו $0.5 \in B$) אבל $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$ סתירה.
- אם $\lfloor m \rfloor < \lfloor 0 \rfloor$ נקבל $\lfloor m \rfloor < 0$ ולכן $\lfloor m \rfloor \leq -1$. טענה: -1 הוא חסם מלרע של B. הוכחה: לכל $x \in B$ מתקיים

$$\lfloor m' \rfloor = -1 < \lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$$

ולכן $(-1,x)\in T$. כעת:

- אם $\lfloor m\rfloor\le -2$ נקבל ש $m'=-1$ חסם מלרע שגדול ממנו (ואינו שווה לו) שהרי $\lfloor m\rfloor=-2<-1=\lfloor m'\rfloor$ ולכן $(m,m')\in T$. קיבלנו סתירה לכך ש m הוא $\inf B$.
- אחרת $\lfloor m\rfloor=-1$ ונקבל ש $m'=-1$ הוא חסם מלרע שאינו קטן מ m (בסתירה לכך ש m הוא $\inf B$) שהרי לא מתקיים $(-1,m)\in T$ (כי הערך השלם התחתון שלהם שווה).

4. (7 נקודות כל סעיף) תהא A קבוצה ותהא $f:A\to A$ פונקציה.

נסמן $f^n=\underbrace{f\circ f\cdots\circ f}_{f \text{ פעמים } n}$ את ההרכבה של f על עצמה n פעמים. עבור $n=1$ נגדיר $f^1=f$.

נתון שקיים $m\ge 1$ טבעי כך ש $f^{m+1}=f^m$. ענו על הבאים:

(א) הוכיחו באינדוקציה כי לכל k טבעי מתקיים $f^{m+k}=f^m$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה על k:

- בסיס $k=1$. צ"ל $f^{m+1}=f^m$. זה בדיוק נתון בשאלה.
- צעד: נניח שהטענה נכונה עבור k מסוים. נוכיח כי הטענה נכונה עבור $k+1$. כלומר נניח כי $f^{m+k}=f^m$ ונוכיח כי $f^{m+k+1}=f^m$. אכן

$$f^{m+k+1}=f\circ f^{m+k}=f\circ f^m=f^{m+1}=f^m$$

כפי שרצינו להוכיח.

(ב) הוכיחו: אם f פונקציה חח"ע אזי $f=I_A$ (תזכורת I_A היא פונקצית הזהות על A).

פתרון: נניח f חח"ע ונוכיח $f=I_A$. כיוון שהרכבה של פונקציות חח"ע היא פונקציה חח"ע נסיק כי f^m היא פונקציה חח"ע. לכל $x\in A$ מתקיים כי $f^{m+1}(x)=f^m(x)$ או

$$f^m\left(f(x)\right)=f^m(x)$$

ומכיוון ש f^m חח"ע נסיק כי $f(x)=x$. כיוון שזה לכל $x\in A$ נסיק כי $f=I_A$ כפי שרצינו.

(ג) הוכיחו: אם f פונקציה על אזי $f=I_A$.

פתרון: נניח f על ונוכיח $f=I_A$. כיוון שהרכבה של פונקציות על היא פונקציה על נסיק כי f^m היא פונקציה על. יהא $y\in A$. כיוון ש f^m על נסיק שקיים $x\in A$ כך ש $f^m(x)=y$. לכן

$$f(y)=f\left(f^m(x)\right)=f^{m+1}(x)=f^m(x)=y$$

ולכן $f(y)=y$. כיוון שזה נכון לכל $y\in A$ נסיק כי $f=I_A$ כפי שרצינו.

5. (7 נקודות כל סעיף) קבעו את העוצמה של כל אחת מהקבוצות A,B,C הבאות, קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0,\aleph,2^{\aleph}$ או אחרת (לקבוצה של דורון: $c=\aleph$):

(א) הקבוצה A המוגדרת

$$A=\{(S_1,S_2)\in P(\mathbb{R})\times P(\mathbb{R})\mid S_1\subseteq S_2\}$$

כלומר זוגות סדורים (S_1,S_2) של תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ המקיימות $S_1\subseteq S_2$.

פתרון: נבנה פונקציה

$$f:P(\mathbb{R})\to A$$

על ידי $f(S)=(\emptyset,S)$. קל לראות שזה פונקציה חח"ע ולכן

$$2^{\aleph}=|P(\mathbb{R})|\le|A|$$

ומצד שני: $A\subseteq P(\mathbb{R})\times P(\mathbb{R})$ ולכן

$$|A|\le|P(\mathbb{R})\times P(\mathbb{R})|=2^{\aleph}\cdot 2^{\aleph}=2^{\aleph+\aleph}=2^{\aleph}$$

ומכאן ש $2^{\aleph}\le|A|$ וגם $|A|\le 2^{\aleph}$ולכן לפי ק.ש.ב יש שיווין $|A|=2^{\aleph}$.

(ב) הקבוצה B המוגדרת להיות קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f^{-1}[\mathbb{N}]$ מעוצמה $\aleph_0$.

פתרון: נבנה פונקציה

$$g:(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})^{\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}}\to B$$

על ידי $g(f)=f\cup I_{\mathbb{N}}$. כלומר $g(f)$ היא הפונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ המוגדרת:

$$(g(f))(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{N}\\ f(x) & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\end{cases}$$

ונוכיח כי g חח"ע. אכן: נניח $g(f_1)=g(f_2)$ אזי הצמצום של שני הפונקציות ל $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ שווה ולכן

$$f_1=f_2$$

ולכן g חח"ע. מכאן ש $|B| \le \left|(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})^{\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}}\right|$. טענה: $|\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}| = \aleph$ הוכחה: $\aleph = |\mathbb{R}| = |\mathbb{N}| + |\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}| =$ $|\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}| = \max\{\aleph_0, |\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}|\}$ שהרי אם $\max\{\aleph_0, |\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}|\} = \aleph_0$ נקבל $\aleph = \aleph_0$ סתירה.
כיוון ש $2^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$ נקבל כי $2^{\aleph} \le |B|$.
מצד שני: $B \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ולכן $|B| \le \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.
לפי ק.ש.ב נקבל שיוויון $|B| = 2^{\aleph}$.

(ג) הקבוצה C המוגדרת להיות קבוצת כל הפונקציות $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ המקיימות: לכל n טבעי קיים m טבעי כך ש $f(m) \ge n$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$g : [0,1] \to C$$

על ידי $g(x)$ תהיה הפונקציה מ $\mathbb{N}$ ל $\mathbb{R}$ המוגדרת $(g(x))(n) = n + x$ כלומר

$$g(x) = \{(n, n+x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

זוהי אכן פונקציה מ $\mathbb{N}$ ל $\mathbb{R}$. בנוסף, לכל n טבעי קיים m טבעי כך ש $(g(x))(m) \ge n$ שהרי עבור $m = n$ נקבל $(g(x))(n) = n + x \ge n + 0 = n$. לכן $g(x) \in C$ לכל $x \in [0,1]$.
טענה: g חח"ע.
הוכחה: נניח $g(x_1) = g(x_2)$ אזי שתי הפונקציות שוות ובפרט הם שוות עבור הקלט 1. כלומר,

$$(g(x_1))(1) = (g(x_2))(1)$$

ולכן

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

ומכאן ש $x_1 = x_2$ כפי שרצינו.
מסקנה: $\aleph = |[0,1]| \le |C|$.
מצד שני: $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ולכן

$$|C| \le \aleph^{\aleph_0} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

וקיבלנו $\aleph \le |C|$ וגם $|C| \le \aleph$ ולכן לפי ק.ש.ב. נקבל שיוויון $|C| = \aleph$.