

## תרגיל 5

1. חשבו  $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] dz$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה המוגדרת ע"י  $z(t) = \begin{cases} e^{it} & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1-2t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

2. חשבו  $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3 - 8}{\bar{z} - 2} dz$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- $i$  עד  $0$ , ואח"כ הקטע הישר מ- $0$  עד  $1$ .

3. השתמשו במשפט ההערכה (חסם  $ML$ ) כדי להוכיח את אי השוויונות הבאים:

א. כאשר  $\gamma$  היא המסילה המורכבת משלושת הקטעים  $\left| \int_{\gamma} (e^z - e^{\bar{z}}) dz \right| \leq 2(\pi + 2)e$

הישרים: מ- $1 - i$  ל- $1 + \frac{\pi}{2}i$ , מ- $1 + \frac{\pi}{2}i$  ל- $-1 + \frac{\pi}{2}i$  ומ- $-1 + \frac{\pi}{2}i$  ל- $-1$

ב. כאשר  $\gamma$  היא המסילה המורכבת מחצי המעגל (עם רדיוס  $1$  ומרכז

באפס) מ- $1$  ל- $-1$  ומהקטע הישר מ- $-1$  ל- $1$

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\oint_{\gamma} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$  כאשר  $\gamma$  נתונה לפי  $|z-1|=1$  נגד כיוון השעון.

ב.  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$  נגד כיוון השעון

ג.  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$  נגד כיוון השעון

ד.  $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$  כאשר  $\gamma$  נתונה לפי  $\gamma(t) = it, -1 \leq t \leq 1$

5. השתמשו בנוסחת אינטגרל קושי עבור  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$  ( $k$  קבוע ממשי) בכדי להוכיח ש-

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi \quad \text{ו-} \quad \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$

6. בניח כי הפונקציה  $f(z)$  מוגדרת ע"י האינטגרל  $f(z) = \oint_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$ . מצאו את

$$f'(1+i)$$

7. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:  
לכל פונקציה אנליטית,  $f(z)$ , ולכל מסילה חלקה  $\gamma$  מתקיים

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\gamma} f(z) dz\right) = \int_{\gamma} \operatorname{Re} f(z) dz$$