תרגיל 5

שאלה 1

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(e-1)$$

נחפש נקודות קיצון של הפונקציה

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}$$

על התחום $[0,1]$.
ראשית נסתכל על הקצוות

$$g(0) = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = \frac{1}{2}$$

כמו כן

$$g'(x) = -\frac{2-x-(1+x)}{(1+x)^2(2-x)^2}$$

נקבל שהנגזרת מתאפסת כאשר

$$1-2x = 0$$

כלומר

$$x = \frac{1}{2}$$

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})} = \frac{4}{9}$$

כמו כן $g(x)$ היא פונקציה אי שלילית ולכן לפי אי שוויונות של אינטגרלים

$$\frac{4}{9}(e-1) = \frac{4}{9}\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x \le \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1)$$

שאלה 2

לפי לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2 \mathrm{d}t}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4 2x}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}$$

שאלה 3

נגזור ונשווה ל 0. הנגזרת של

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

היא

$$F'(x) = \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x = 2\frac{\sin x^2}{x}$$

הנגזרת שווה ל 0 כאשר $x = \sqrt{\pi k}$ $k \in \mathbb{N}$.
נבצע נגזרת שניה ונקבל

$$F''(x) = 2\frac{\cos x^2 2x \cdot x - \sin x^2}{x^2}$$

$$F''(\sqrt{\pi k}) = 4\cos \pi k = 4(-1)^k$$

נקבל שנק' מינימום מקומי תתקבלנה כאשר $x = \sqrt{2\pi k}$ $k \in \mathbb{N}$.

שאלה 4

סעיף 1

הוכחה:

הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ כי היא רציפה. נניח בשלילה שהאינטגרל שלה הוא 0. זה אומר שהאינפימום של כל סכומי דרבו העליונים הוא 0.
קיים $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) > 0$. נבחר $f(c) > M > 0$. לפי הגדרת רציפות, קיים $\delta > 0$ כך שאם $x \in [c-\delta, c+\delta]$ מתקיים $f(x) > M$.
קל לראות שבכל סכום עליון $\overline{S}$ של דרבו שניקח יתקיים ש

$$\overline{S} \geq 2\delta M > 0$$

(כי הסכום יכיל לפחות את המלבן שנוצר בשטח $2\delta M$)
ולכן האינפימום של הסכומים העליונים הוא לפחות $2\delta M > 0$ בסתירה.

סעיף 2

הפרכה: ניקח על הקטע $[0,1]$ את

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

.5

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) - \cos((n+m)x)\mathrm{d}x$$

נחשב את הרכיבים. נתחיל בלחשב את $\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)$. אם $m \neq n$ אז

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)\mathrm{d}x = \frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

ואם $m = n$ אז

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$$

באופן דומה, אם $m \neq -n$ אז

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) = 0$$

ואם $m = -n$ אז

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) = 2\pi$$

ולכן בסך הכל

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n \neq 0 \\ \pi & m = -n \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

שאלה 6

סעיף 1

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n} e^{(\frac{k}{n})^2}$$

כלומר זהו סכום רימן על $[0,1]$ של הפונקציה xe^{x^2}לפי החלוקה

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$$

כאשר בוחרים כל פעם את הנקודה הימנית ביותר.
ולכן הסדרה שווה ל

$$\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1)$$

(לצורך חישוב האינטגרל השתמשנו בהצבה $t = x^2$)

סעיף 2

בדומה קל לראות ש

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}=\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}$$

כלומר זאת שוב החלוקה $P_n=\{0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\}$ רק הפעם על הפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

ו

$$\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{2}$$

סעיף 3

$$c_n=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{2^n}\sin\frac{k}{2^n}$$

כאן שוב אנחנו מקבלים סכום רימן של על הקטע $[0,1]$ אבל הפעם עם החלוקה

$$P_n=\{0,\frac{1}{2^n},\ldots,\frac{2^n-1}{2^n},1\}$$

שזאת חלוקה ל $\frac{1}{2^n}$ קטעים לכן זהו סכום רימן של

$$\int\limits_0^1\sin x\mathrm{d}x=-\cos x|_0^1=-\cos 1+1$$