

הצעה לפתרון – בוחן חדו"א 2 להנדסה (83-114) 2017 – עדי מכנס

הערות:

1. משך הבוחן: 90 דק'
2. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

שאלה 1. (48 נק')

בדוק את ההתכנסות של ארבעה מתוך חמשת הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n \right]$

פתרון:

נשים לב כי מדובר בטור חיובי, ולכן הוא יכול להתכנס או להתבדר.

ניעזר בכלל השורש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{2}{5}$$

ידוע כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2^n}}{3^n}$

פתרון:

נשים לב כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2^n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

אבל אלו שני טורים שמתכנסים! (הטור ההנדסי), לכן לפי חשבון טורים הטור מתכנס.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

פתרון:

נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}}$

פתרון:

נבדוק אם הטור מקיים את התנאי ההכרחי.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2+1)^{\frac{1}{n}}$$

נבצע את טריק e ב $\ln$ ונקבל:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(2n^2+1)}$$

ונחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n^2+1)}{n}$$

נשתמש בכלל לופיטל ונקבל:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n^2+1} = 0$$

ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(2n^2+1)} = 1$$

ולכן הסדרה מקיימת:

$$(-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} \right| \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} \rightarrow 0$$

אבל גבול הסדרה הזו היא $\frac{2}{3} \neq 0$, ולכן טור זה מתבדר.

$$\text{ה. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

פתרון:

טור זה חיובי, לכן הוא יכול להתכנס או להתבדר.

ניעזר בכלל המנה:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \end{aligned}$$

ניעזר בכלל ה e בכדי לחשב סדרה זו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{n-n-1}{n+1} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e}$$

אבל:

$$\frac{2}{e} \leq \frac{2}{2} = 1$$

(כי $2 < e < 3$) ולכן הטור מתכנס.

22 נק') **שאלה 2.**

קבע האם הטור $\sum_{n=3}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^{1-2n}}{3^n}$ מתכנס.

אם תשובתך חיובית חשב את סכומו.

פתרון:

טור זה אולי נראה מפחיד, אז נעשה לו מסאז' מפנק:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^{1-2n}}{3^n} = 5 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{2^{2n} \cdot 3^n} = 10 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

זהו בעצם הטור ההנדסי (שמתחיל מ $n = 3$ ולא מ $n = 0$ אך עדיין הנדסי)
 לכן:

$$10 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 10 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n - 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{144} \right)$$

והרי נוסחת הטור ההנדסי היא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{11}{12}} = \frac{12}{11}$$

וביחד נקבל כי:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^{1-2n}}{3^n} = 10 \cdot \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{144} \right) = \boxed{\frac{5}{792}}$$

בחר שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות:

שאלה 3. (30 נק')

א. פתח את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ לטור חזקות ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון:

נתחיל מהטור ההנדסי הידוע:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(כאשר תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$) נציב $-x^2$ ונקבל:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}}$$

קל לראות כי עדיין מדובר באותו רדיוס התכנסות, ולכן רדיוס ההתכנסות של טור זה היא:

$$\boxed{(-1,1)}$$

ב. פתח את הפונקציה $g(x) = \arctan x$ לטור חזקות ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון:

נבצע אינטגרציה איבר איבר על הטור בסעיף הקודם (מותר ברדיוס ההתכנסות הנתון) ומתקיים כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x)$$

כאשר רדיוס ההתכנסות נשאר $(-1,1)$.

ג. נביט בפונקציה $h(x) = x^8 \arctan(x^6)$. חשב את הנגזרות מסדר 590,591, ז"א: $h^{(590)}(0), h^{(591)}(0)$.

פתרון:

נציב x^6 בטור שקיבלנו בסעיף הקודם:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{12n+6}}{2n+1} = \arctan(x^6)$$

נכפיל את הטור ב x^8 ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{12n+14}}{2n+1} = x^8 \arctan(x^6)$$

כעת נמצא את המקדם a_{590} . נפתור את המשוואה:

$$590 = 12n + 14$$

$$12n = 576$$

$$n = 48$$

לכן אם נציב $n = 48$ נקבל שהמקדם הוא:

$$a_{590} = \frac{1}{97}$$

אבל לפי משפט קיום ויחידות טורי טיילור:

$$\frac{1}{97} = a_{590} = \frac{f^{(590)}(0)}{590!}$$

ולכן:

$$\boxed{f^{(590)}(0) = \frac{590!}{97}}$$

באופן די דומה, נמצא את המקדם a_{591} :

$$591 = 12n + 14$$

$$577 = 12n$$

אבל קל לראות כי $\frac{577}{12} \notin \mathbb{N}$ ולכן אין מקדם מפורש עבורו בטור, ומשמע שהמקדם הוא 0.

לכן, כמו מקודם:

$$0 = a_{591} = \frac{f^{(591)}}{591!}$$

$$\boxed{f^{(591)}(0) = 0}$$

שאלה 4. (30 נק')

נתון טור החזקות הבא:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n} \cdot x^n$$

א. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

פתרון:

ניעזר בכלל המנה:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n}}{\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\ln^2(n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln^2(n+1) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} \cdot \frac{\left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \right|} \end{aligned}$$

נחשב את הגבולות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \stackrel{\text{WIN}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$

כעת בעזרת ההצבה:

$$t = \frac{1}{n}$$

$$t = \frac{1}{n+1}$$

ניתן להיפטר מהגבול השמאלי והאמצעי, שכן הם 1! (גבול ידוע). לכן כל שנותר הוא לחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

ובסה"כ נקבל כי:

$$\boxed{R = 1}$$

ב. חקור את ההתכנסות בקצוות.

פתרון:

קל לראות כי ניתן להמיר את השאלה הזו בשאלה האם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n}$$

מתכנס בהחלט (ואז הוא מתכנס בשתי הקצוות), בתנאי (ואז הוא מתכנס רק בקצה השמאלי) או מתבדר (ואז הוא לא מתבדר בקצוות).

התכנסות בהחלט: נבחן את ההתכנסות של טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\ln^2 n}$$

נשים לב כי לכל n מתקיים $\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}$. לכן:

$$\frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\ln^2 n} \leq \frac{1}{n \ln^2 n}$$

קל לראות כי לכל $n \geq 2$ הפונקציה $\frac{1}{x \ln^2 x}$ חיובית, מונוטונית יורדת (פונקציה מונוטונית עולה במכנה) ושואפת לאפס. ניתן להשתמש במבחן האינטגרל!

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\}$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_2^{\infty} = \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_2^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

והאינטגרל מתכנס! לכן גם הטור, שמחה וששון. לכל ילד בלון – הטור מתכנס בהחלט ולכן גם בקצוות טור החזקות מתכנס. לכן תחום ההתכנסות של הטור הוא:

$$[-1,1]$$

😊 בהצלחה!