פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 1 להנדסה – 83112 – 15.02.26

המרצה: ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות משקל כל שאלה: 22 נק'

שאלון חסוי - יש להחזיר את שאלון הבחינה בתוך מחברת הבחינה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(5x)\cos(5x)}{\ln(1+7x^2)e^{2x}\cos(x^2)\sin(3x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1-\cos(5x)}{(5x)^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{7x^2}{\ln(1+7x^2)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{e^{2x}\cos(x^2)}}_{\to 1}\cdot\frac{5^3}{7\cdot 3}=\frac{5^3}{2\cdot 3\cdot 7}$$

ב. $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)-\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)-\frac{1}{x}=\left\{-\infty-\frac{1}{0^+}=-\infty-\infty\right\}=-\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+an+2}{n^2-1}\right)^n$, כאשר $a\in\mathbb{R}$ פרמטר.

$$\frac{n^2+an+2}{n^2-1}=\frac{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\to 1$$

נשתמש בכלל הe

$$\left(\frac{n^2+an+2}{n^2-1}\right)^n\to e^{\lim n\cdot\left(\frac{n^2+an+2}{n^2-1}-1\right)}\overset{\text{למטה}}{=}e^a$$

$$\lim n\cdot\left(\frac{n^2+an+2}{n^2-1}-1\right)=\lim n\cdot\frac{n^2+an+2-n^2+1}{n^2-1}=\lim n\cdot\frac{an+3}{n^2-1}=$$

$$=\lim\frac{a+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}=a$$

2. חשבו את הביטויים הבאים:

א.

$$\int (\ln(x))^2 dx$$

$$\int \ln^2(x)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = \ln(x) & g = \ln(x) \\ f = x\ln(x) - x & g' = \frac{1}{x} \end{Bmatrix} = (x\ln(x) - x)\ln(x) - \int (\ln(x) - 1)dx =$$

$$= xln^2(x) - xln(x) - xln(x) + x + x + C = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(k+n)(k-2n)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(k+n)(k-2n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{(k+n)(k-2n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n \cdot \left(\frac{k}{n} + 1\right) \cdot n \cdot \left(\frac{k}{n} - 2\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{n} + 1\right)\left(\frac{k}{n} - 2\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

מדובר בסדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ הרציפה בקטע $[0,1]$, ולכן לפי המשפט שנלמד בכיתה גבול הסדרה הוא

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx$$

על מנת לחשב את הגבול, נפרק את הפונקציה הרציונאלית לשברים חלקיים

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$A(x-2) + B(x+1) = 1$$

נציב $x = 2$

$$3B = 1$$

$$B = \frac{1}{3}$$

נציב $x = -1$

$$-3A = 1$$

$$A = -\frac{1}{3}$$

סה"כ

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{3}(\ln|x-2| - \ln|x+1|)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1) - \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\ln(0) = -\frac{2}{3}\ln(2)$$

.3

א. הוכיחו כי למשוואה $\cos(x) - \sin(x) = 1 - 2x$ יש בדיוק פתרון אחד.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \cos(x) - \sin(x) - 1 + 2x$$

נגזור

$$h'(x) = -\sin(x) - \cos(x) + 2 \geq 0$$

לכן הפונקציה רק עולה, ויש לכל היותר חיתוך יחיד עם הציר.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cos(x) - \sin(x) - 1 + 2x = \{\text{חסום} \pm \infty\} = \pm\infty$$

הפונקציה רציפה כצירוף של רציפות, ומחליפה משלילי לחיובי, ולכן חותכת את הציר.

סה"כ בדיוק חיתוך אחד.

ב. הוכיחו כי הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=x^2+\sin(x)+\cos(x)-x$ הוא 1.

נגזור

$$f'(x)=2x+\cos(x)-\sin(x)-1$$

כלומר $f'(x)=h(x)$ מסעיף א'.

לכן f' עולה וחותכת את הציר פעם אחת.

עוד נשים לב כי $f'(0)=0$, כלומר f' שלילית בתחום $(-\infty,0)$ וחיובית בתחום $(0,\infty)$

כלומר $f(x)$ יורדת בתחום $(-\infty,0]$ ועולה בתחום $[0,\infty)$

ולכן f מקבלת את המינימום המוחלט שלה כאשר $x=0$ וערכה המינימלי הוא

$$f(0)=1$$

4. תהי סדרה a_n המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי

$$a_{n+1}=a_n^2+\sin(a_n)+\cos(a_n)$$

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2+\sin(a_n)+\cos(a_n)-a_n$$

עבור הפונקציה

$$f(x)=x^2+\sin(x)+\cos(x)-x$$

מתקיים כי

$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)$$

למזלנו חקרנו כבר פונקציה זו, ואין לנו צורך לחקור אותה שוב, ואנו יודעים כי

$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)\geq 1$$

ולכן הסדרה עולה.

ב. חשבו את $\lim a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי, נסמנו $a_n \to L \in \mathbb{R}$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n^2 + \sin(a_n) + \cos(a_n)$$

$$L = L^2 + \sin(L) + \cos(L)$$

$$L^2 + \sin(L) + \cos(L) - L = 0$$

נשים לב כי שוב צד שמאל הוא $f(L) \geq 0$ בסתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא עולה $a_n \to \infty$

5. תהי f פונקציה הגזירה פעמיים בכל $\mathbb{R}$.

עוד נתון שקיים ערך $a \in \mathbb{R}$ עבורו $f'(a) = 0$, וכן $f''(a) < 0$, וכן f'' רציפה ב$x = a$.

א. הוכיחו כי $x = a$ נק' מקסימום מקומי של f.

כיוון שf'' רציפה ב$x = a$ קיימת סביבה של a בה

$$f''(x) \in \left(\frac{3}{2}f''(a), \frac{1}{2}f''(a)\right)$$

(שימו לב ש$f''(a)$ שלילית, ולכן חצי מהמספר <u>גדול יותר</u> מאשר שלוש חצאי המספר).

פתרון ראשון – באמצעות פולינום טיילור:

יהי x בסביבה שמצאנו, נפתח פולינום טיילור מסדר 1 סביב a ונקבל כי

$$f(x) = p_1(x) + R_1(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{0}(x-a) + R_1(x) = f(a) + R_1(x)$$

כאשר $R_1(x)$ היא השגיאה. לפי לגראנז' קיימת c בין x לבין a (ולכן נמצאת בסביבה שלנו) עבורה

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \leq 0$$

לכן סה"כ

$$f(x) - f(a) = R_1(x) \leq 0$$

כלומר $f(x) \leq f(a)$

כפי שרצינו להוכיח (רצינו להוכיח ש$x = a$ מקסימום מקומי).

פתרון שני – בעזרת חקירה:

בסביבה שבנינו מתקיים כי $f'' \leq 0$ ומתאפסת רק בa

לכן f' יורדת בסביבה זו.

כיוון ש $f'(a) = 0$, מסתבר ש f' חיובית בצד השמאלי של הסביבה, ושלילית בצד הימני.

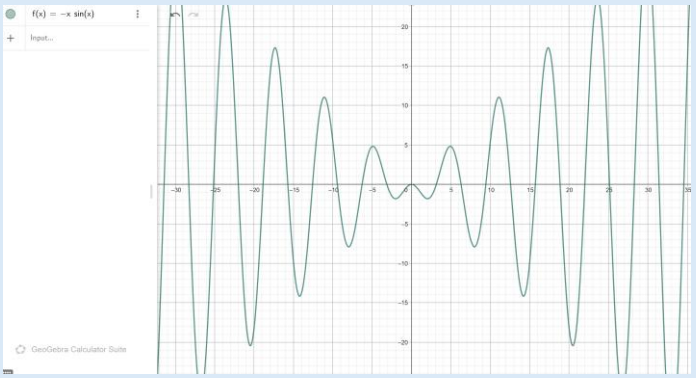
לכן בסביבה זו f עולה משמאל לa ויורדת מימין לa, כלומר $x = a$ היא נק' המקסימום של הסביבה, ולכן מהווה מקסימום מקומי.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \leq f(a)$.

קיצון מקומי לא גורר קיצון מוחלט, זה רמז לכך שמדובר בהפרכה.

כנראה שאפשר למצוא דוגמאות פשוטות יותר עם פולינומים, אבל נלך על הדוגמא המגניבה הבאה:

$$f(x) = -x\sin(x), \qquad a = 0$$



אכן

$$f'(x) = -\sin(x) - x\cos(x), \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) - \cos(x) + x\sin(x), \qquad f''(0) = -2 < 0$$

אבל $f(0) = 0$ וזה בוודאי לא הקיצון המוחלט בכל הממשיים שהרי

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} > 0$$

טוב אצור גם דוגמא פשוטה ממעלה 3

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

$$f''(x) = 6x$$

עבור $a = -1$ נקבל כי

$$f'(-1) = 0$$

$$f''(-1) = -6 < 0$$

כלומר יש מקסימום מקומי בנקודה $\big(-1, f(-1)\big) = (-1,3)$

אבל זה בוודאי לא מקסימום מוחלט כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x(x^2-3) + 1 = \infty$$