פתרונות מלאים למועד ג בחדוא 2 להנדסה

קורס 83-114 | תאריך הבחינה 08/11/26

להלן פתרונות לכל חמש השאלות, לפי סדר הסעיפים במבחן.

שאלה 1 טורים והתכנסות במידה שווה

א סכום הטור

נסמן את הסכום המבוקש ב־S. נשתמש בפיתוח טיילור של הלוגריתם:

$$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n},\quad 0\le t\le\frac{1}{2}$$

הטור מתכנס במידה שווה בקטע זה לפי מבחן ויירשטראס: הערך המוחלט של האיבר ה־n חסום על ידי $1/(n2^n)$, וטור החסמים מתכנס. לכן מותר לבצע אינטגרציה איבר־איבר:

$$\int_0^{1/2}\ln(1+t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^{n+1}}=\frac{S}{2}$$

מצד שני, אינטגרציה ישירה נותנת:

$$\int_0^{1/2}\ln(1+t)dt=\left[(1+t)\ln(1+t)-(1+t)\right]_0^{1/2}=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$$

לפיכך סכום הטור הוא

$$S=3\ln\frac{3}{2}-1$$

ב התכנסות במידה שווה

תחילה נמצא את הגבול הנקודתי. כאשר $x=0$ מתקיים $f_n(0)=0$. עבור $x>0$ קבוע:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{x/n}{1/n^2+x^2}\to 0$$

לכן פונקציית הגבול על כל הקטע היא אפס. ואולם, לכל $n\ge 1$ הנקודה $x_n=1/n$ שייכת לקטע, ובה מתקיים:

$$f_n(x_n)=\frac{n(1/n)}{1+n^2(1/n)^2}=\frac{1}{2}$$

למעשה, מהאי־שוויון $1+a^2\ge 2a$ עבור $a\ge 0$ נקבל $0\le f_n(x)\le 1/2$, ולכן הסופרמום של השגיאה שווה בדיוק לחצי לכל n. הוא אינו שואף לאפס, ועל כן הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

שאלה 2 כלל השרשרת

נתון כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$u_x(t,2t) + 2u_y(t,2t) = 2t$$

נגדיר פונקציית עזר במשתנה אחד:

$$h(x) = u(x,2x)$$

לפי כלל השרשרת ולפי הנתון,

$$h'(x) = u_x(x,2x) + 2u_y(x,2x) = 2x$$

א חישוב הנגזרת של הפונקציה המורכבת

בעזרת פונקציית העזר אפשר לכתוב את הפונקציה הנתונה בצורה $g(x) = u(h(x),2h(x)) = h(h(x))$. הפעלת כלל השרשרת נותנת:

$$g'(x) = [u_x(h(x),2h(x)) + 2u_y(h(x),2h(x))]h'(x)$$

מותר להציב בנתון $t = h(x)$, שכן הזהות מתקיימת לכל מספר ממשי. הביטוי בסוגריים שווה לכן ל־$2h(x)$. נציב גם $h'(x) = 2x$ ונקבל:

$$g'(x) = 2h(x) \cdot 2x = 4xu(x,2x)$$

ב הוכחת הנוסחה עם הקבוע

מאחר ש־$h'(x) = 2x$, נגזרת הפונקציה $h(x) - x^2$ מתאפסת בכל הישר. לפי משפט הערך הממוצע זוהי פונקציה קבועה. לכן קיים $C \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$h(x) = x^2 + C, \quad C = h(0) = u(0,0)$$

הזהות נכונה לכל קלט ממשי, ולכן אפשר להציב בה גם את הקלט $h(x)$:

$$g(x) = h(h(x)) = (h(x))^2 + C = (x^2 + C)^2 + C$$

זהו אותו קבוע בשתי ההופעות: בשני השלבים משתמשים באותה פונקציה h. בכך הוכחה הטענה לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה 3 קיצון על אליפסה וישר משיק

יש למצוא את ערכי הקיצון של $f(x,y)=xy+5$ על האליפסה $x^2+4y^2=8$.

א הערכים המקסימלי והמינימלי ונקודות השגתם

האליפסה היא קבוצה סגורה וחסומה והפונקציה רציפה, ולכן קיימים עליה מקסימום ומינימום מוחלטים. נגדיר את פונקציית האילוץ:

$$q(x,y)=x^2+4y^2-8$$

הגרדיאנט $\nabla q=(2x,8y)$ אינו מתאפס על האליפסה. לפיכך כל נקודת קיצון מקיימת את משוואות לגראנז׳:

$$y=2\lambda x,\quad x=8\lambda y,\quad x^2+4y^2=8$$

אם $x=0$, המשוואה הראשונה מחייבת $y=0$, בסתירה לאילוץ. באופן דומה גם $y\neq 0$. כפל המשוואה הראשונה ב־x והשנייה ב־y נותן:

$$xy=2\lambda x^2,\quad xy=8\lambda y^2$$

כמו כן $\lambda\neq 0$, ולכן $x^2=4y^2$. הצבה באילוץ נותנת $8y^2=8$, כלומר $y=\pm 1$ ו־$x=\pm 2$. אלה ארבע הנקודות החשודות. נציב בפונקציה:

$$f(2,1)=f(-2,-1)=7$$

$$f(2,-1)=f(-2,1)=3$$

לכן המקסימום המוחלט הוא 7 והוא מתקבל בנקודות $(2,1)$ ו־$(-2,-1)$. המינימום המוחלט הוא 3 והוא מתקבל בנקודות $(2,-1)$ ו־$(-2,1)$.

אפשר גם לוודא את החסמים ישירות: מהאי־שוויונות $(x-2y)^2\geq 0$ ו־$(x+2y)^2\geq 0$, יחד עם האילוץ, נקבל:

$$-2\leq xy\leq 2$$

ב הישר המשיק בנקודה הנתונה

הנקודה $(2,1)$ שייכת לאליפסה, והווקטור $\nabla q(2,1)=(4,8)$ ניצב לישר המשיק. לכן משוואתו היא:

$$4(x-2)+8(y-1)=0$$

לאחר צמצום מתקבלת משוואת הישר:

$$x+2y=4$$

שאלה 4 נפח ומסה

הגוף נמצא מעל הדיסקה $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$, בין המישור $z=0$ לבין הגרף $z=3-x^2-y^2$. גובהו חיובי על כל הבסיס.

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad dV=r\,dz\,dr\,d\theta$$

תחומי האינטגרציה הם $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 1$ ו־$0\le z\le 3-r^2$.

א נפח העוגה

הנפח מתקבל מאינטגרציה של פונקציית הגובה על הבסיס:

$$V=\iint_D (3-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (3-r^2)r\,dr\,d\theta$$

$$V=2\pi[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^4}{4}]_0^{\,1}=2\pi(\frac{3}{2}-\frac{1}{4})=\frac{5\pi}{2}$$

ב מסת העוגה

נתונה צפיפות נפחית $\rho(x,y,z)=1+z$. לכן המסה היא אינטגרל משולש של הצפיפות על הגוף:

$$m=\iiint_V (1+z)dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{3-r^2}(1+z)r\,dz\,dr\,d\theta$$

נחשב תחילה את האינטגרל לפי הגובה:

$$\int_0^{3-r^2}(1+z)dz=[z+\frac{z^2}{2}]_0^{\,3-r^2}=(3-r^2)+\frac{(3-r^2)^2}{2}$$

לאחר פתיחת הסוגריים נקבל:

$$m=2\pi\int_0^1(\frac{15}{2}-4r^2+\frac{r^4}{2})r\,dr$$

$$m=2\pi[\frac{15r^2}{4}-r^4+\frac{r^6}{12}]_0^{\,1}=2\pi(\frac{15}{4}-1+\frac{1}{12})=\frac{17\pi}{3}$$

כלומר, נפח העוגה הוא $5\pi/2$, ומסתה עבור הצפיפות הנתונה היא $17\pi/3$.

שאלה 5 שטף דרך מעטפת העוגה

נתון השדה $F(x,y,z)=(xz,yz,z^2)$. המשטח M הוא מעטפת סגורה של הגוף משאלה 4, והנורמל מכוון החוצה.

חישוב בעזרת משפט גאוס

השדה בעל נגזרות רציפות בכל המרחב, והגוף חסום ובעל שפה חלקה למקוטעין, ולכן אפשר להפעיל את משפט גאוס. הדיברגנץ הוא:

$$\nabla \cdot F = z + z + 2z = 4z$$

לפיכך, בקואורדינטות הגליליות של שאלה 4, השטף הוא:

$$\Phi = \iint_M F \cdot n \, dS = \iiint_V 4z \, dV$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{3-r^2} 4zr \, dz \, dr \, d\theta = 4\pi \int_0^1 (3-r^2)^2 r \, dr$$

$$\Phi = 4\pi[\frac{9r^2}{2} - \frac{3r^4}{2} + \frac{r^6}{6}]_0^{\,1} = 4\pi \cdot \frac{19}{6} = \frac{38\pi}{3}$$

בדיקה ישירה לפי חלקי המעטפת

ברצפה מתקיים $z=0$, ולכן השדה מתאפס והשטף דרך הרצפה הוא אפס.

בקיר הגלילי $r=1$, נבחר פרמטריזציה $s(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,z)$, כאשר $0\le\theta\le 2\pi$ ו־$0\le z\le 2$. וקטור השטח החיצוני הוא $(\cos\theta,\sin\theta,0)d\theta dz$, ולכן המכפלה הסקלרית עם השדה היא z. מכאן:

$$\Phi_{wall} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 z \, dz \, d\theta = 4\pi$$

בתקרה $z=h(x,y)=3-x^2-y^2$ הכיוון החיצוני הוא כלפי מעלה. וקטור השטח הוא $(2x,2y,1)dxdy$, ולכן:

$$F(x,y,h)\cdot(2x,2y,1) = 2(x^2+y^2)h + h^2 = 9 - r^4$$

$$\Phi_{roof} = 2\pi \int_0^1 (9-r^4) r \, dr = \frac{26\pi}{3}$$

סכימת שלושת חלקי המעטפת מחזירה את אותה תוצאה:

$$\Phi = 0 + 4\pi + \frac{26\pi}{3} = \frac{38\pi}{3}$$