אנליזה מודרנית – תרגול 9

בתרגיל הבית האחרון ראינו שיש "אי נעימויות" במרחב $AC(I)$, אם I אינו סגור וחסום.
לכן מהיום נתמקד במקרה שבו הקטע סגור וחסום.

השתנות חסומה:

<u>תזכורת:</u> אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $P|[a,b]$ (P חלוקה של $[a,b]$) ע"י הנקודות $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ מגדירים את <u>ההשתנות של f ביחס ל-P</u> ע"י $v(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$, ואת <u>ההשתנות הטוטאלית של f בקטע [a,b]</u> ע"י $T_a^b[f]=\sup\left\{v(f,P):P|[a,b]\right\}$

<u>הגדרה:</u> אם $T_a^b[f]<\infty$ אומרים ש-f בעלת השתנות חסומה בקטע. מרחב כל הפונקציות בעלות השתנות חסומה הוא $BV([a,b])=\left\{f:T_a^b[f]<\infty\right\}$.

<u>הגדרה:</u> אומרים שחלוקה Q היא עידון של החלוקה P, אם Q מתקבלת מ-P ע"י הוספת נקודות.

תרגיל: תהיינה $P,P^*|[a,b]$ חלוקות ו-*P מעדנת את P. הוכיחו כי $v(f,P)\le v(f,P^*)$

פתרון: תחילה, נניח כי *P התקבלה מ-P ע"י הוספת נקודה אחת בלבד, *x הנמצאת בקטע $x_{r-1}<x^*<x_r$. אם כך:

$$v(f,P)=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|+\ldots+\left|f(x_r)-f(x_{r-1})\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|$$
$$=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\ldots+\left|f(x_r)-f(x^*)+f(x^*)-f(x_{r-1})\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|\le$$
$$\le\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\ldots+\left|f(x_r)-f(x^*)\right|+\left|f(x^*)-f(x_{r-1})\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=v(f,P^*)$$

ואם *P התקבלה ע"י הוספת N נקודות, חוזרים על ההוכחה שלעיל N פעמים.

<u>תרגיל:</u> תהי $P:a=x_0<x_1<\ldots x_n=b$ חלוקה, הוכיחו כי $T_a^b[f]=\sum_{k=1}^{n}T_{x_{k-1}}^{x_k}[f]$

<u>פתרון:</u> נניח כי מדובר על חלוקה בת שני קטעים (אחרת, כמו מקודם אפשר לחזור על ההוכחה) $P:a=x_0<x_1=c<x_2=b$ ויש להראות $T_a^b[f]=T_a^c[f]+T_c^b[f]$.

$\le$: תהי $P|[a,b]$, נעדן את P ע"י הוספת הנקודה c (אם אינה נמצאת):

$$v(f,P)\le v(f,P\cup\{c\})=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\dots|f(c)-f(x_{m-1})|$$
$$+|f(x_{m+1})-f(c)|+\dots|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le \sup\{v(f,P):P\,|\,[a,c]\}+\sup\{v(f,P):P\,|\,[c,b]\}$$

הראינו כי כל איברי הקבוצה $\{v(f,P):P|[a,b]\}$ חסומים מלעיל ע"י $T_a^c[f]+T_c^b[f]$ ולכן גם הsup שלה מקיים $\sup\{v(f,P):P|[a,b]\}\le T_a^c[f]+T_c^b[f]$ וזה הא"ש המבוקש.

$\ge$: יהי $\varepsilon>0$, ע"פ האפיון של sup יש חלוקות $P_1|[a,c],P_2|[c,b]$ המקיימות $v(f,P_1)\ge T_a^c[f]-\varepsilon/2$, $v(f,P_2)\ge T_c^b[f]-\varepsilon/2$. נחבר את הא"ש לקבל $v(f,P_1)+v(f,P_2)\ge T_a^c[f]+T_c^b[f]-\varepsilon$. $P_1\cup P_2$ היא חלוקה של $[a,b]$ וקל לראות כי $v(f,P_1\cup P_2)=v(f,P_1)+v(f,P_2)$. ז"א $\sup\{v(f,P):P|[a,b]\}\ge v(f,P_1\cup P_2)\ge T_a^c[f]+T_c^b[f]-\varepsilon$. נשאיף $\varepsilon\to 0$ לקבל התוצאה.

<u>תרגיל:</u> תהי $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה, $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=I_{\mathbb{Q}}(x)$ הוכיחו שבכל קטע $[a,b]$ (קטע עם אורך חיובי!) מתקיים $T_a^b[D]=\infty$

<u>פתרון:</u> יהי N טבעי. על סמך צפיפות הרציונליים והאי-רציונליים בקטע, נוכל לבנות חלוקה $P_N: a=x_0<x_1<\dots x_N=b$ "מתחלפת" – זאת אומרת שהנקודות הן מתחלפות בין רציונליות לאי-רציונליות לסירוגין (לפחות בלי הקצוות, שם אין לדעת). נחשב את ההשתנות: $v(D,P_N)=\sum_{k=1}^{N}|D(x_k)-D(x_{k-1})|\ge\sum_{k=2}^{N-1}|D(x_k)-D(x_{k-1})|=\sum_{k=2}^{N-1}1=N-2$. אם כך הקבוצה $\{v(D,P):P|[a,b]\}$ מכילה מספרים גדולים כרצוננו ולכן $\sup\{v(D,P):P|[a,b]\}=\infty$.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$.

פתרון: צריכים לתפוס את התנודות של הפונקציה. $\sin\frac{1}{x}$ מחזירה $+1$ בנקודות $x_k=\frac{2}{\pi+4\pi k}$ ומחזירה -1 בנקודות $x_k=\frac{2}{3\pi+4\pi k}$. לכל N נגדיר שוב חלוקה "מתחלפת" $P_N:\frac{2}{\pi}>\frac{2}{3\pi}>\dots>\frac{2}{\pi+4\pi k}>\frac{2}{3\pi+4\pi k}>\dots>\frac{2}{\pi+4\pi N}>\frac{2}{3\pi+4\pi N}$

מקבלים

$$v\left(f,P_N\right)\geq$$
$$\left|\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right|+$$
$$\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi N\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi N\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3\pi}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}+\frac{2}{3\pi+4\pi N}\right|=$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)}$$

וכאשר $N\to\infty$ מקבלים טור מתבדר. מכאן ה-sup הוא אינסוף.

<u>תרגיל:</u> תהי $f\in BV\left([a,b]\right)$

א. הוכיחו כי לכל $x_0\in(a,b)$ קיימים הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to x_0^-}f(x),\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ (מכאן שלפונקציה בעלת השתנות חסומה אין אי רציפות מהסוג השני).

ב. הוכיחו כי קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא בת מנייה (וכמובן ממידת לבג 0).

<u>פתרון:</u> ע"פ "משפט הפירוק של ז'ורדן" ניתן לרשום $f=g-h$ כאשר g,h עולות.

א. ידוע שלפונקציות עולות קיימים גבולות חד-צדדיים, ולכן המספרים $\lim_{x\to x_0^+}g(x),\lim_{x\to x_0^-}g(x),\lim_{x\to x_0^+}h(x),\lim_{x\to x_0^-}h(x)$ קיימים כולם. מאריתמטיקה של גבולות מקבלים כי גם הגבולות החד-צדדיים של f קיימים בכל נקודה.

ב. ידוע מאינפי' שקבוצת נקודות אי הרציפות של פונקציה מונוטונית היא בת מנייה. קבוצת נקודות אי הרציפות של f מוכלת באיחוד של נקודות אי הרציפות של g,h ולכן היא בת מניה.

<u>תרגיל:</u> תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה בהחלט, $f'(x)\in\{0,1\}$ כב"מ (dm) ו-$f(0)=0$

2. קיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$, מדידה לבג כך ש-$f(x)=m\left(A\cap(0,x)\right)$

פתרון:

$1\Leftarrow2$ נגדיר $A:=\left\{x\in[0,1]:f'(x)=1\right\}$. בגלל ש-f רציפה היא מדידה, ולכן גם הנגזרת שלה 'f מדידה (תרגול שעבר) ומכאן שהקבוצה A מדידה. עכשיו בגלל ש-f רציפה בהחלט:

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'dm=\int_0^x f'dm=\int_0^x I_A dm=\int_0^1 I_{A\cap(0,x)}dm=m\left(A\cap(0,x)\right)$$

$2 \Leftarrow 1$ $f(x) = m\left(A \cap (0,x)\right) = \int_0^x I_A dm$ ומכאן f רציפה בהחלט (הכללת לבג חלק א')

ע"פ הכללת לבג $f'(x) = I_A(x)$ כב"מ, ולכן $f'(x) \in \{0,1\}$ כב"מ. ופשוט לראות כי $f(0) = 0$.

[לצורך תרגיל הבית כדאי להוכיח שאם פונקציה רציפה בהחלט עם נגזרת חסומה כב"מ אזי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ]