

מרצה: דר' ארז שיינר      משך המבחן: שלוש שעות      חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד  
משקל כל שאלה: 20 נק'      ענו על כל השאלות      כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x^3)e^{x^2-1}}{(1-\cos(x))^3}$       ב.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \ln(x))$       ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n!}}{n!}$

2.

א. חשבו את  $\int \frac{1}{\arctan(x) + x^2 \cdot \arctan(x)} dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^3-1} dx$

3. הוכיחו כי לכל  $0 < a \in \mathbb{R}$  קיים פתרון יחיד למשוואה  $\ln(e^x + 1) = a$ .

4. תהי פונקציה  $f$  גזירה ב  $\mathbb{R}$ , כך ש  $f(f(x)) = f(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

א. הוכיחו שקיימת נקודה עברה  $f'(x) = 0$  או קיימת נקודה עברה  $f'(x) = 1$ .

ב. הוכיחו שאם  $f(0) \neq 0$  קיימת נקודה עברה  $f'(x) = 0$ .

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} + a_n + n$ .

א. הוכיחו כי  $a_n$  מונוטונית עולה.

ב. חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

6.

א. חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k^3}{k^2 + 3nk + 2n^2} \right)$

ב. קרבו את  $\sqrt{8}$  באמצעות הפונקציה  $f(x) = \sqrt{9+x}$  עד כדי  $h = \frac{1}{100}$ .