מבוא לאלגברה לינארית

תרגיל 6- פתרון

1. תהי $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

א. הראו ש- S היא בסיס אורתוגונלי ל- $\mathbb{R}^4$.

פתרון:

נסמן: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$v_1^Tv_2=0, v_1^Tv_3=0, v_1^Tv_4=0, v_2^Tv_3=0, v_2^Tv_4=0, v_3^Tv_4=0$ ולכן הוקטורים הנתונים אורתוגונליים ביניהם ולכן גם בת"ל ולכן הקבוצה S הינה בסיס אורתוגונלי ל- $\mathbb{R}^4$.

ב. כתבו את $v=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\\6\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של וקטורים מ- S.

פתרון: צריך למצוא קבועים x,y,z,w כך ש- $xv_1+yv_2+zv_3+wv_4=v$.

מאחר והבסיס אורתוגונלי מתקיים:

$$v^Tv_1=x\|v_1\|^2 \Rightarrow x=\frac{v^Tv_1}{\|v_1\|^2}=\frac{1+3-5+6}{1+1+1+1}=\frac{5}{4}$$

$$v^Tv_2=y\|v_2\|^2 \Rightarrow y=\frac{v^Tv_2}{\|v_2\|^2}=\frac{1+3+5-6}{1+1+1+1}=\frac{3}{4}$$

$$v^Tv_3=z\|v_3\|^2 \Rightarrow z=\frac{v^Tv_3}{\|v_3\|^2}=\frac{1-3-5-6}{1+1+1+1}=\frac{-13}{4}$$

$$v^Tv_4=w\|v_4\|^2 \Rightarrow w=\frac{v^Tv_4}{\|v_4\|^2}=\frac{1-3+5+6}{1+1+1+1}=\frac{9}{4}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-5\\6\end{pmatrix}=\frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{13}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{9}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

2. יהי $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. מצאו $w\in W$ אשר מצמצם למינימום את המרחק $\|v-w\|$, כאשר:

א. $W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

נסמן:

$w_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$w_1^T w_2=1-2+2-2+1=0$, כלומר הוקטורים אורתוגונליים ולכן הוקטור המבוקש $w=c_1w_1+c_2w_2$, כאשר

$$c_1=\frac{v^Tw_1}{\|w_1\|^2}=\frac{1+4+3+8+5}{1+4+1+4+1}=\frac{21}{11}$$

$$c_2=\frac{v^Tw_2}{\|w_2\|^2}=\frac{1-2+6-4+5}{1+1+4+1+1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

ולכן $w=\frac{21}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{117}{44}\\\frac{135}{44}\\\frac{75}{22}\\\frac{135}{44}\\\frac{117}{44}\end{pmatrix}$

ב. $W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\5\\-1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

נסמן:

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$w_1^T w_2 = 1+0+1+10-1 = 11 \neq 0$ ולכן נבנה בסיס אורתוגונלי ל- W.

$\tilde{w}_1 = w_1$

$$\tilde{w}_2 = w_2 - \frac{w_2^T \tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|^2}\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\5\\-1\end{pmatrix} - \frac{1+0+1+10-1}{1+4+1+4+1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\5\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי ל- w: $\{v_1, v_2\}$, כאשר

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

הוקטור המבוקש הוא: $w = c_1 v_1 + c_2 v_2$, כאשר

$$c_1 = \frac{v^T v_1}{\|v_1\|^2} = \frac{1+4+3+8+5}{1+4+1+4+1} = \frac{21}{11}$$

$$c_2 = \frac{v^T v_2}{\|v_2\|^2} = \frac{0-4+0+12-10}{0+4+0+9+4} = \frac{-2}{17}$$

$$w = \frac{21}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{17}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{21}{11}\\\frac{758}{187}\\\frac{21}{11}\\\frac{648}{187}\\\frac{489}{187}\end{pmatrix}$$

3. מצאו בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי ל- $U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

נסמן: $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}$

ולכן הוקטורים של הבסיס האורתוגונלי הם:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2^{\;T} v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1-1+2+2}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3^{\;T} v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{u_3^{\;T} v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{1+2-3-4}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0-4-3-4}{0+4+1+1}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{11}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

ניתן לכפול את הוקטור האחרון ב- 6 ולקבל:

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס אורתוגונלי למרחב U.

כדי לקבל בסיס אורתונורמלי, ננרמל את הוקטורים של הבסיס האורתוגונלי:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1+1+1}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{0+4+1+1}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{144+16+1+49}}\begin{pmatrix}12\\-4\\-1\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{\sqrt{210}}\\\frac{-4}{\sqrt{210}}\\\frac{-1}{\sqrt{210}}\\\frac{-7}{\sqrt{210}}\end{pmatrix}$$

לסיכום $\{w_1, w_2, w_3\}$ הינו בסיס אורתונורמלי למרחב U