elez@math.biu.ac.il

לוגיקה מתמטית

קבע סיר יש מכסה שמתאים לו (+)

קיים סיר שעם המכסים אינם מתאימים לו (−)

בסוק הזה אנחנו שיכולה לקבל ערך אמת או שקר.

אומרים הזה פסוק שיש אופציה עבורך.

קשרים: "גם", "או", "אם-אז" (גרירה) מקבלים 2 פסוקים ומחזירים פסוק חדש.

"לא" (שלילה). שולח פסוק ומייצר פסוק

p	$\neg p$
T	F
F	T

קשר השלילה: $\neg$, $\sim$ קיימים 4 קשרים אונארים אך לעתים

הימים בעל משמעות הינו שלילה (אומרת הפך שקר/אמת או עשויה מהה לעיקר)

קשר "וגם":

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

קשר "או":

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

① p = גירה מרוהטת, q = גירה במרכז פסוק: $p \vee q$

רוצה אותן הגירה $p \wedge q$ לפי רוצה את הגירה $(p \wedge q)^r$

$p^r \vee q^r \equiv (p \wedge q)^r$ (≡) שקף חוקן בזה מופיעה

אנו מסמנים ≡ עבור פסוקים שקולים, פירוש מקבלים אותו ערך

אומרת מה הגירה אפשרית.

הוכחת זהה מופיעה:

$(p^r \vee q^r)^r \equiv p \wedge q$

p	q	$(p \wedge q)^r$	$p^r \vee q^r$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

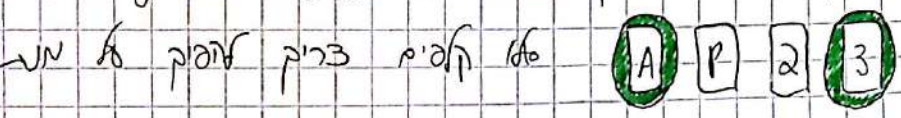
$p = (p^r)^r$

Scanned by CamScanner

קשר "אם-אז":

② אם נתון לנו נושק ≡ אם נושק לא נובח

יש קלפים שעל הקלף מצד אחד אות ומצד שני מספר



אם הטענה "מאחורי כל קלף עם אות טוטאלי מופיעה מספר טוטאלי"

p- יש אות טוטאלי

q- יש מספר טוטאלי

→ שורר

שקר שורר כ אמרו.

ואחרת נכונה אם נאמרו.

p	q	$q \to p$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

③ = אם יש מנעול, אפשר להכין קונה.

= יין מנעול, או שאפשר להכין קונה.

= אם אי אפשר להכין קונה אז אין מנעול.

$q \to p$

$p \vee q$

$\neg q \to \neg p$

p	q	$q \to p$	$p \vee q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

p- יש מנעול

q- אפשר להכין קונה

דוגמאות:

אם הגור $a_m \geq 3$ מתכנס, אז $a_n \to 0$

אזי אם $a_n \not\to 0$ אז $a_m \geq 3$ מתבדר

④ אם נובח אז נושק $q \to p$ ≡ $\neg p \to \neg q$

אם נושק אז נובח $p \to q$

קשר "אם ורק אם"

$(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$ כאשר שניהם שווה או שניהם שקר

Scanned by CamScanner

⑤ 1. כאשר השמן טרוויאלי ע"י הנשענים הקודמים.

2. כאשר הנשענת שני קודמו, השמן טרוויאלי. (שמו קיקי)

3. השמן טרוויאלי אם ורק אם ע"י הנשענות קודמים.

האם מהנתן ש-משפטים 1, 2 ואת אפשר להסיק שמשפט 3 נכון?

תכיתה: נבחר ב טוענים

שהשמן טרוויאלי ע"י הנשענים הקודמים מהנחה ①

נניח שע"י הנשענים הקודמים, בפרט קיקי קודמו, ולכן השמן טרוויאלי ②

לכן, נתון סתירה שמשפט 3 נכון.

קשר כמתים:

עבור A, קיים $\exists$ (:) מתקיים $\forall$ כך ש...

ע"י הנחיות בכיתה חכמים ← חסרים פתיקים

$\forall x \in A : P(x)$ — הטענה A — "x הוא חכם" $= P(x)$

קיים תלמיד חכם בטענה $\exists x \in A : P(x)$

"x מקנא ע"י y" $=: P(x,y)$ — A- כיתה

עבור x קיים y מקנא את $\forall x \in A \exists y \in A : P(x,y)$

קיים y שעבור x מקנא את $\exists y \in A \forall x \in A : P(x,y)$

תרגיל:

נבדוק על המשפט: "קיים תלמיד חכם יחיד בטוח"

A כיתה, "x חכם" $= P(x)$

$$\exists x \in A : \left[P(x) \wedge (\forall y \in A : x \neq y \to \neg P(y)) \right]$$

"כלומר האולפן ריק"

אם A קבוצה ריקה $\forall x \in A : P(x) = \top$

שלילת כמתים:

$$\neg(\exists x \in A : P(x)) \equiv \forall x \in A : \neg P(x)$$

$$\neg(\forall x \in A : P(x)) \equiv \exists x \in A : \neg P(x)$$

"יש מכסה שמתאים לו"

$P(x,y)$ y מתאים לx A סוגים B מכסות

$\forall x \in A \exists y \in B : P(x,y)$ משלה ← $\exists x \in A : \forall y : \neg P(x,y)$

$\exists x \in A \forall y \in A : \neg P(x,y)$

Scanned by CamScanner

ש"ב (ב.ד):

$\forall x: P(x) \to Q(x)$

$P(x)$ = "x מגיע לגיר" $Q(x)$ = "x מקבל פרס"

הוכחה: $\forall x: P(x) \to Q(x)$

$\exists x: P(x) \wedge \neg Q(x)$

$\neg(\forall x: P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x: P(x) \wedge \neg Q(x)$

$\neg(a \to b) \equiv \neg(\neg a \vee b) \equiv a \wedge \neg b$

$\exists x: P(x) \wedge \neg Q(x)$

$a \to b \equiv \neg a \vee b$

$\neg(a \to b) \equiv a \wedge \neg b$

$(\neg a \wedge d) \vee (b \wedge d) \equiv (\neg a \vee b) \wedge d$

$(\neg d \vee d) \wedge (b \vee d) \equiv (\neg \wedge b) \vee d$

Scanned by CamScanner

קבוצות

מה זה קבוצה?

תאוריה האינטואיטיבית, קבוצה היא אוסף איברים.

הפרדוקס של השפ:

נגדיר את קבוצת כל הקבוצות שאינן עצמיות.

נקרא לה A.

אם $A \in A$ סותר את מה שהיא אמורה עצמית.

אם $A \notin A$ אז $A \in A$ כי היא אינה שייכת עצמית

אי אפשר להגדיר קבוצה כזו אחרת.

בתאוריה הנאיבית ניתן להגדיר את קבוצת כל הקבוצות

הגדרה אלמנט:

$x \in A$ אם x איבר של A

x יכול להיות מספר, קבוצה, פונקציה

$\{1,2,3\}$ איברים: $1, 2, 3$

$\{1,2,3\} \notin \{1,2\}$ אין איבר

חושבים על קבוצה כקופסה קטנה ושואבי פעמים את הקופסה, מוציאים את הפריטים הנמצאים, רואים את כל האיברים שנמצאים שם.

הקבוצה הריקה: $\{\} = \emptyset$ $\emptyset \notin X$

$1 \notin \{\{1\}\}$

$\emptyset \in \{\{\}\}$

הגדרה:

הגדרה היא יחס בין קבוצות. נאמרים ש- $A \subseteq B$ אם $\forall x \in A : x \in B$ כאשר מדברים הגדרה, פעמים את 2 הקופסאות, ואומרים שכל איבר מהשמאל (מצד שם מימין).

דוגמה:

$\{1,2,3\} \supseteq \{1,2\}$ $\quad 1,2,3 \supseteq 1,2$

כל קבוצה A מקיימת $A \supseteq \emptyset$ (כיון שאין כזה).

Scanned by CamScanner

מה השלילה של $\forall x \in \emptyset : p(x)$

$\exists x \in \emptyset : \neg p(x)$ ← סתירה לכן הטענה שלנו

$\{1, \{\emptyset\}\} \not\subseteq \{\emptyset\}$ ← כאן מופלא $\{1, \{\emptyset\}\} \not\ni \emptyset$

מה נכון לומר אם $A \not\subseteq B$ $\equiv \exists x \in A : x \notin B$ $\neg \forall x \in A : x \in B$

כלומר $A \subseteq B$ אם ורק אם קיים $a \in A$ כך ש- $a \notin B$

פעולות על קבוצות

חיתוך: בהינתן 2 קבוצות A, B, נסמנן את קבוצת $A \cap B$ ע"י

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (כלל x, x שייך ל-A וגם x שייך ל-B)

דיאגרמת ון:



$A \cap B =$ ●

דוגמאות:

$\{1, 2, \{3\}\} \cap \{\{1,2\}, 3\} = \{\ \} = \emptyset$

$\{3, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$

מה צריך שיתקיים $x \in A \cap B$

x שייך ל-B וגם x שייך ל-A $x \notin A \vee x \notin B$

מה ההבדל בין $\cap$, $\vee$:

$\cap$ זו פעולה בין קבוצות, $\vee$ פעולה בין פסוקים.

איחוד:

בהינתן $A \cup B$ נקרא לקבוצה $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

דיאגרמת ון:



הערה:

בקבוצות אובר יכול להופיע פעם 1 בלבד והסדר בקבוצה איננו חשוב.

דוגמאות:

$\{1, \{\{1,2\}, \emptyset, 1\}\} \cup \{\emptyset, \{3\}\} = \{1, 2, \{3\}, \emptyset, \{1,2\}\}$

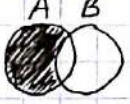
Scanned by CamScanner

הפרש:

נסמנו $A \setminus B$

הגדרה: הקבוצה של כל האברים x שמקיימים $x \in A$ אבל לא מקיימים $x \in B$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



דיאגרמת וון:

דוגמה

$$\mathbb{N} \setminus \{\text{חצי}, 1\} = \{\text{חצי}\}$$

משלים

לפעמים אנו מסתכלים רק על קבוצה שמוכלת באוניברסום מסוים "עולם" מסוים. לעתים נסמן ב- $U = \mathbb{N}$

משלים:

בהינתן עולם U וקבוצה $A \subseteq U$ נסמנו $\bar{A}$, (A^c) ע"י

$$\bar{A} = U \setminus A$$

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

$$U = \{1, \ldots, 10\}$$

$$\{1,2\} = \{3, \ldots, 10\}$$

Scanned by CamScanner

שיטות הוכחה

הוכחה בשלילה:

שלילה: ההיפך והשלילה שקרים בהחלט

מהלך ההוכחה: ① נניח את ההנחות ② נניח את שלילת הטענה ③ נסיק סתירה

דוגמה:

הוכיחו כי $A \setminus B = B \setminus A$ אם A, B קבוצות

נניח בשלילה:

נניח $A \neq B$ ונשים: $A \setminus B = B \setminus A$

ק"י $a \in A$ כך ש- $a \notin B$ או $a \in B$ כך ש- $a \notin A$

נאמר $a \in A \setminus B$ אולם $a \notin B \setminus A$ סתירה לשוויון.

ובאופן דומה מקבלים סתירה עבור $B \setminus A$ אולם $a \in B \setminus A$ $a \notin A \setminus B$.

דוגמה:

הוכיחו ש- $\sqrt{2}$ אינו רציונלי $\mathbb{Q} \ni \sqrt{2}$

נאמר לכן קיימים שלמים a, b כך ש- $\left(\frac{a}{b}\right)^2$

נניח בשלילה:

נניח בשלילה שקיים שבר שמצמצם שווה ל-a.

נסמן ב- $\frac{a}{b}$ את הצורה המצומצמת של השבר הנ"ל.

נאמר $\frac{a}{b}$ שבר מצמצם כך ש $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \leftarrow a^2 = 2b^2$

לכן a^2 זוגי, לכן a זוגי לכן קיים מס' טבעי a'

כך ש- $a = 2a'$

$2b^2 = 4a'^2 \leftarrow b^2 = 2a'^2$

לכן b^2 זוגי, לכן b זוגי,

לכן שם a זוגי ושם b זוגי וסתירה לכך ש $\frac{a}{b}$ שבר מצומצם

Scanned by CamScanner

הוכחת טענה מתמטית

טענה: $\forall x \in A : P(x)$

הוכחה:

יהי $x \in A$ נניח $P(x)$

דוגמא:

אם A, B אז $A \cup B = B \cup A$ אם $A = B$

הוכיחו ש- $\forall A, B : A \cup B = B \cup A \rightarrow A = B$

טענה: $\exists x \in A : P(x)$

מלמד שיש לפחות x אחד שעבורו $P(x)$.

דוגמא:

הוכיחו שכל קבוצה B קיימת קבוצה A כך ש- $A \cup B = B$

כלומר קבוצה B כך שקיימת A כך ש- $A \cup B = B$

נניח A שהוא $\emptyset$ ואז $B \cup B = B$

כי מקור הוכחה קונטרפוזיטיבי אלוים כי משם הסיבה הפשוטה.

אלגוריתם נכון קיים פלוסופי.

דוגמא:

הוכיחו שכל מס' ממשי קיים מס' קטן ממנו.

כלומר $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y < x$

יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $x > y$ אז קיים

נבחר $y = x - 1$ נראה שאכן $y < x$

אם $x - 1 < x$ אז $-1 < 0$

הדוגמא את ההגדרה הבאה:

הגדרה שבה סדרה - כל איבר מקיים בסדרה שהוא קטן מאיזה איבר בסדרה קטן מ- ε

כלומר a_n סדרה $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |a_n - 7| < \varepsilon$

כאשר בכיתה למשל שלומדים ריקה $A=\emptyset$ ב־99% מהמקרים

הערה:

שכיחה ב־דוגמה: ① $\forall \leftarrow \square$ ② $\square \leftarrow \forall$

הוכיחו שאם ורק אם:

$$\forall \Leftrightarrow \square$$

$$\bar{B} \cup \bar{A} \in X \quad \leftrightarrow$$

$\forall X \not\ni$ אז $B \notin X \Leftrightarrow \bar{A} \in X$ אז $B \in A$

① יהי X מתקיים $\overline{A \cup B} \in X \Leftrightarrow A \cup B \notin X$

יהי X סגור ו־מהגדרה $A \cup B \in X$ מתקיים כי $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

דוגמה:

$\square \subsetneq \forall$ יהי $\square \supset X$ כך $\forall \supset X$

כיצד נוכיח שאין הכלה בין הקבוצות?

$A \subset B \vee B \subset A \Leftrightarrow B = \forall$ מתקיים כך $\forall$ ו־$\square$ כאלו ש־$\square \not\subset \forall$, $\forall \not\subset \square$ הכלה זו כוללת, למשל נוכיח ש־ $\forall = \square$ כך ש־$\forall \in \square$

② הוכיחו שכל X $\forall \in X \Leftrightarrow \square \ni X$ כך $\forall = \square$

כי אחד משניהם הוא הקבוצה

הוכיחו שהטענה הזו היא קבוצה: $(\forall \cup \forall) \cap (B \cup \forall) = (\forall \cup B) \cup \forall$

הוכיחו שהטענה הזו אינה קבוצה:

יהיו $\exists M < M$, לכל $\exists \frac{1}{3} < M$ וכן $\exists > \frac{1}{M}$

נשים לב שמתקיים שכל $\exists M < M$, $\exists > \frac{1}{M}$ כך שמתקיים: $\exists \frac{1}{3} < \exists M$

* לכל $\exists M$ קיים כזה שהוא קטן מ־ $\frac{1}{3}$

יהי: $\exists \varepsilon > 0$ שלכל קיים $\exists M$ כך שעבור $\exists M < M$ מתקיים $\exists > \frac{1}{M}$

$$\exists \varepsilon > |0 - \frac{1}{M}| : \exists M < \forall A \; \exists M \in \square < \exists A$$

כלומר שעבור מספרים $\frac{1}{M}$ הוא אפס

הוכחה:

Scanned by CamScanner

דוגמא:

תהיינה קבוצות A,B,C הוכיחו כי $A\setminus(B\cup C)=A$ אם ורק אם $A\cap B=\emptyset$ וגם $A\cap C=\emptyset$

נשים $A=A\setminus(B\cup C)$ ב"ש $A\cap B=\emptyset$ ו $A\cap C=\emptyset$

נניח $A\cap C=\emptyset$:

נניח בשלילה $A\cap C\neq\emptyset$ אזי קיים $x\in(A\cap C)$ אזי $x\in A\wedge x\in C$

$x\in C$ אזי $x\in B\cup C$ אזי $x\notin A\setminus(B\cup C)$ אזי $x\notin A$

אזי סתירה. באופן דומה $A\cap B=\emptyset$.

יהיו שני שמים $A\cap B=\emptyset$ ו $A\cap C=\emptyset$ ו $A=A\cap(B\cup C)$ ב"ש

נניח בשלילה הטענה הבאה כלומר ב"ש:

① $A\supseteq A\setminus(B\cup C)$ וגם ② $A\setminus(B\cup C)\subseteq A$.

① יהי $x\in A\setminus(B\cup C)$ ב"ש $x\in A$

שים $x\in A$ וגם $x\notin B\cup C$ מכאן ש- $x\in A$

② יהי $x\in A$ ב"ש $x\in A\setminus(B\cup C)$

ונזכר ש- $A\cap C=\emptyset$ אזי $x\notin C$ מהנתון נובע $x\notin B$

אזי סיכם $x\notin B\cup C$ אבל $x\in A$ אזי $x\in A\setminus(B\cup C)$

Scanned by CamScanner

שטח הוכחה

תזכורת למקרים:

$a \in A$ אז $(a \in B \text{ או } a \notin B)$

דוגמא 1:

הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x \geq 0$ או $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\frac{x}{1+n^4x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

יהי n, $x \geq 0$:

① אם $x \leq \frac{1}{n^2}$

$$\frac{x}{1+n^4 \cdot x^2} \leq \frac{x}{1} \leq \frac{1}{n^2}$$

② אם $x > \frac{1}{n^2}$

$$\frac{x}{1+n^4 \cdot x^2} \leq \frac{x}{n^4x^2} = \frac{1}{n^4x}$$

$$\frac{1}{n^4x} < \frac{1}{n^4 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^2}$$

דוגמא 2:

יהי $x > 0$

3 מקרים:

$x^n \xrightarrow[n \to \infty]{}$

① $x = 1$ $\quad 1^n = 1$

② $x > 1$ $\quad x^n \to \infty$

③ $0 < x < 1$ $\quad x^n \to 0$

Scanned by CamScanner

אינדוקציה

תהי סדרה $P(n)$ שאינה

עבור מה:

① $P(1)$: $3>2$ $P(2)$: $9>4$ $n^3>n^2$

② המספר n טבעי,

③ n קבוצה של n בתים, מכלה בתים מאחת בגדר בדיוק.

אינדוקציה היא שיטה לוודאות שפע הטענה בסדרה מתקיימת נכונה.

פעמים אנו מנחשים מראש את "משפחה" הנכונה ומוכיחים שפקנו.

אינדוקציה מתמטית:

יהי $P(n)$ סדרה שאינה, אם:

① $P(1)$ אמת

② $\forall n: P(n) \to P(n+1)$

אז, P הטענה $P(n)$ נכונה.

הסבר:

$$P(1) \to P(2) \to P(3) \to P(4) \quad T = P(4)$$

דוגמא:

יהי סדרה המוגדרת ע"י:

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \quad \forall n$$

תכיחו כי לכל n $a_n < 3$

תכנית:

① בדיקה- $a_1 < 3$

② שהה האינדוקציה $\forall n: P(n) \to P(n+1)$

יהי n כך ש- $P(n)$ נכון, $\forall$ $P(n+1)$ נכון.

נניח: $a_n < 3$ $\forall$ $a_{n+1} < 3$ צ"ל $\sqrt{6+a_n} < 3$

$\sqrt{6+a_n} < \sqrt{6+3}$ ← $\sqrt{6+a_n} < 3$ מ.ש.ל.

נתבונן שבירת כלשהי ונקבל 2 קבוצות כך שכל $n \geq$

ובקבוצה שבירת כלשהי עם $n+1$ קודקודים בדיוק n חיצים

כך שסדרת הכלים עם $n+1$ קודקודים בדיוק n חיצים

יהי n כך ש- הטענה נכונה עבור $n \geq 1$ כך שמקבל $n+1$ נכונה

בסיס: $n=1$ ○ מחוברים

הוכחה:

בדיקה: $n=1$ ○ מחוברים

$n=2$ קודקוד אחד

$n=3$ 3 קודקודים ביניים

יהי n קודקודים הטענה נכונה כלל הטענה $n+1$ נכונה.

גם קבוצה עם $n+1$ אנשים כלל $\frac{n(n-1)}{2}$ קודקודים

מחיקת $n+1$ נבחר מישהו ונשים אותו בצד. נשארו n אנשים.

כעת יש $\frac{(n-1)n}{2}$ קודקודים ולפי הנחת ה אינדוקציה.

נוסיף n קודקודים עם הצדק יבקש מהם $n = \frac{(n-1)n}{2}$

צמוד סה"כ קודקודים $\frac{(n+1)n}{2}$ **מ.ש.ל**

אינדוקציה מלאה:

תהי סדרת טענות $P(n)$ כאשר n הטבעיים המקיימת מקיימת, הסדרה נכונה ל.ע n:

① הטענה הראשונה נכונה.

② עבור n אם כל הטענות עד וכולל n נכונות, אזי הטענה $n+1$ נכונה.

דוגמה:

תהי שכבה שקולה עם n קודקודים.

כמה שבירות יש לבצע עד שנקבל את כל הקודקודים.

תשובה: $n-1$

הוכחה:

בדיקה: $n=1$ ○ מחוברים

יהי n כך ש- הטענה נכונה עבור $n \geq 1$ כלל שטענה $n+1$ נכונה

כלל שסדרת כלשהי עם $n+1$ קודקודים בדיוק n חיבורים

נבצע שבירת כלשהי ונקבל 2 שכבות כך אחת בגודל $\leq n$

כמה יש בסך הכל חיבורים? $\frac{n(n-1)}{2}$

דוגמה:

אם יש n אנשים מחדר ובכל לחצים ובאים לכל

תשובה:

המשך הוכחה:

מאחר ו־x קבוע, המשוואה x^{k-1+n} קבועה.

לכן הטענה הפונקציה x בריבוע ש"י $1-x$ תואמים עבור הנתון האינדוקציה

ולאחר השוויון $1-x^{1-k+n}$ כאשר הם מופרדים

סה"כ שם שמרנו: $n = 1 + (x-n) + (1-x)$ מ.ש.ל

דוגמא:

הוכיחו כי לכל n טבעי, קיימים $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ וקיים x כך ש- $n = m \cdot 2^x$

הוכחה:

עבור $n=1$ $\quad 1 = 1 \cdot 2^0$ $\quad (x=0 \quad m=1)$

יהי n כך שעבור כל k טבעי, $k < n$, הטענה נכונה.

צ"ל שהטענה נכונה עבור $n+1$ כלומר $n+1 = m \cdot 2^x$

נתון לשאיר:

① אם $n+1$ אי זוגי, נבחר $x=0$ $\quad m = n+1$ ולכן $n+1 = 2^0 \cdot (n+1)$

② אם $n+1$ זוגי אזי $n+1 = 2p$, $p \leq n$ לפי הנתון האינדוקציה

קיימים m_1, x_1 כך ש- $p = m_1 \cdot 2^{x_1}$ ולכן $n+1 = 2 \cdot m_1 \cdot 2^{x_1}$ $\quad n+1 = m_1 \cdot 2^{x_1+1}$

נשאר מתרון $\quad m = m_1 \quad x = x_1 + 1$ מ.ש.ל

דוגמא 2:

הוכיחו כי לכל מטריצה יש צורה מדורגת קנונית.

נעשה אינדוקציה על מספר העמודות.

בסיס: $n=1$ יהי $A^{m \times 1}$ מטריצה עם עמודה אחת.

אם A עמודת אפסים הוא קנוני.

אחרת יש איבר שונה מ-0 נעלה אותו עד שיעלה ונאפס את האחרים

באמצעות נרמול אותו ל-1.

נניח שלכל מטריצה $A^{m \times n}$ במדרג יש צורה קנונית

רוצים להוכיח שלכל מטריצה מהצורה $A^{m \times (n+1)}$ יש צורה קנונית.

Scanned by CamScanner

תרגיל:

יהי $A^{n\times(n+1)}$

נניח בשלילה בדרך כלל שהמערכת שמגדיר את n העמודות הראשונות
היא מערכת קרמר.

נעזר בכך שהמערכת ה-n העמודות הראשונות הן שורות אפסים
אלא $x=0$ סימון והמערכת מערכת קרמר כי בכל שורה יש איבר
פיבוט וכפל שכפל על מטריצת המקדמים המורחבת.

אלא x השורה האחרונה מטריצה $1\times n$, אפסים, שוב סימון.
אחרת נציב אותן לשורה ה-x מטריצה
(כזה לפחות משנה את n העמודות הראשונות כי בכל שם אפסים)
נשלם את כולם מתבטלים ומקבלים.

כזה לפחות נפסק בהשלם עמודה, אחרת שלם, כי בכל אפסים מטריצה $n-1$
נפחות אחרת $0=1$ וסימן.

Scanned by CamScanner

מחשבים עם קבוצות

איחוד וחיתוך כללים

נשים לב לדמיון הקבוצה של הקבוצות את הקסים.

דוגמא:

$$A_n = \{1, 2, \dots n\} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$ קבוצה של קבוצות

הגדרה:

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ קטע בישר / נקי במישור $= (1,2)$

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

$$A_\alpha := (0, \alpha)$$

$$\{A_\alpha \mid 0 < \alpha \in \mathbb{R}\} \quad (0,-1) = \emptyset$$

$\{A_i \mid i \in I\}$ האינדקסים $I = \{1,2,3\}$ קבוצת $\{A_1, A_2, A_3\}$

איחוד כללי:

איחוד של קבוצה של קבוצות

$$S = \{\{1\}, \emptyset, \{\{1\}, 2\}\}$$

$$\bigcup S = \{1\} \cup \emptyset \cup \{\{1\}, 2\} = \{\{1\}, 1, 2\}$$

לה כמו לפעמה את כל הקבוצות הקטנות שנמצאות ב S

סימון איחוד כללי: S - קבוצת קבוצות $\bigcup S$ - איחוד

$$S = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{1, 2, 3, \pi\}$$

נניח
$$\begin{cases} I = \{1,2,3\} \\ A_1 = \{1,2\} \\ A_2 = \{1,3\} \\ A_3 = \{\pi\} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

הגדרה:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \mid \exists \alpha\in I : x\in A_\alpha\}$$

אם $\mathcal{S}$ קבוצה של קבוצות אז

$$\bigcup \mathcal{S} := \{x \mid \exists A\in\mathcal{S} : x\in A\}$$

הגדרה חיתוך כללי:

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \mid \forall \alpha\in I : x\in A_\alpha\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} := \{x \mid \forall A\in\mathcal{S} : x\in A\}$$

דוגמאות:

$$\bigcup_{0<\alpha\in\mathbb{R}} (0,\alpha) = (0,\infty)$$

הוכחה:

צ"ל $\bigcup_{0<\alpha\in\mathbb{R}} (0,\alpha) \subseteq (0,\infty)$ וגם $(0,\infty) \subseteq \bigcup_{0<\alpha\in\mathbb{R}} (0,\alpha)$

① יהי $x\in \bigcup_{0<\alpha\in\mathbb{R}} (0,\alpha)$ צ"ל $x\in(0,\infty)$

יהי $0<\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש- $x\in(0,\alpha)$

אזי $0<x<\alpha$ ולכן $x\in(0,\infty)$

② יהי $x\in(0,\infty)$ צ"ל $x\in \bigcup_{0<\alpha\in\mathbb{R}} (0,\alpha)$

נשים $0<x$ צ"ל קיים $0<\alpha$ כך ש- $x\in(0,\alpha)$

נבחר $\alpha = x+1$ ולכן $x\in(0,\alpha)$

מתקיים $x\in(0,\alpha) = (0,x+1)$

Scanned by CamScanner

דוגמא:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = (0,2)$$

$$\left(\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}, 1.5\right), (1,2) \ldots$$

הכלה זו כיוון:

יהי $x\in(0,2)$ אז $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$

נשים לב שקיים n כך ש- $x\in\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$ אז $0<x<2$ אז $\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}$

$0<\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}<2$ כי $0<\frac{1}{n}$ $1+\frac{1}{n}<2$

יהי $x\in(0,2)$ אז $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$

צ"ל קיים n כך ש- $x\in\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$

① אם $x\geq 1$ אז $1<x<2$ לכן $x\in(1,2)$

נבחר $n=1$

② אם $x\leq 1$ אז $0<x\leq 1$

רוצים שבחור n כך ש- $\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}$

כלומר n כך ש- $x<\frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $n>\frac{1}{x}$

נבחר $n>\frac{1}{x}$ אזי $x\in\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$

נניח יש קבוצה U כך $\forall\alpha\in I$ $A_\alpha\subseteq U$

אז בהכרח ש- $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\subseteq U$

משפחה כלי:

שלילה: $\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}=\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha$

משלים איחוד: $\overline{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha$

Scanned by CamScanner

הוכחה:

יהי X אזי $X \in \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha} \leftrightarrow X \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \leftrightarrow \neg\exists \alpha\in I : X\in A_\alpha \leftrightarrow \forall \alpha\in I : X\notin A_\alpha \leftrightarrow \forall \alpha\in I : X\in \overline{A}_\alpha \leftrightarrow X\in \bigcap_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha$

קבוצת החזקה

יהי קבוצה A נגדיר את קבוצת החזקה $P(A)$ עבור A להיות

קבוצה שאיבריה הם A

$$P(A) := \{X \mid X\subseteq A\}$$

עבור A כלשהי $\emptyset \in P(A)$

הוכחה:

$\emptyset \in A$

$\emptyset \in P(A)$ ←

כמו כן עבור A $A \in P(A)$

קבוצת החזקה הקבוצה היחידה שאיבריה היא $\emptyset$ $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

שקילות:

$$X\subseteq A \leftrightarrow X\in P(A)$$

משפט:

הוכחה / הפרכה:

עבור A,B קבוצות $A\subseteq B \leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

הוכחה:

יהיו A,B קבוצות

← נניח $A\subseteq B$ ונוכיח $P(A)\subseteq P(B)$

יהי $X\in P(A)$ ונוכיח $X\in P(B)$

נניח $X\subseteq A$ ונוכיח $X\subseteq B$ מכך

← נניח $P(A)\subseteq P(B)$ ונוכיח $A\subseteq B$

יהי $X\in A$ ונוכיח $X\in B$

$X\in A$ ← $\{X\}\subseteq A$ אזי $\{X\}\in P(A)$ אזי $\{X\}\in P(B)$

$\{X\}\subseteq B$ ← $X\in B$

סימון:

אם A קבוצה סופית נסמן ב- $n=|A|$ את מספר האיברים בקבוצה.

טענה:

תהי A סופית, אזי $|P(A)|=2^{|A|}$

דוגמא:

$$|\emptyset|=0 \qquad |P(\emptyset)|=2^0=1$$

הוכחה:

באינדוקציה עבור $n=0$ $\quad |\emptyset|=0 \quad |P(\emptyset)|=1=2^0$

יהי n עבורו הטענה נכונה, ונוכיח שהטענה $n+1$ נכונה

תהי A כך ש $|A|=n+1$ איברים

ונוכיח $|P(A)|=2^{(n+1)}$

נבחר איבר a כלשהו מ- A

$$n=|A\setminus\{a\}|$$

לפי הנחת האינדוקציה ל $A\setminus\{a\}$ יש 2^n תתי קבוצות

תתי קבוצות של A שלא מכילות את a שוות לתתי קבוצות של A שכן מכילות את a

מכיוון שכמות תתי הקבוצות של A שמכילות את a, זו בדיוק הקבוצות שמתקבלות מהוספת a לכל אחת מהקבוצות שלא מכילות את a.

לכן 2^n כפול 2. מסה"כ

$$|P(A)|=2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$ מש"ל

דוגמא:

$$A=\{1,2,3\} \qquad a=3 \qquad A\setminus\{3\}=\{1,2\}$$

$$P(A\setminus\{3\})=\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\} \quad \blacleft \quad \{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$$

Scanned by CamScanner

מכפלה קרטזית

הגדרה:

יהיו A,B קבוצות. נגדיר:

$$A\times B=\left\{(a,b)\middle|\begin{matrix}a\in A\\ b\in B\end{matrix}\right\}$$

(a,b) נקרא סדור

דוגמא:

$$A=\{1,2\}\quad B=\{\text{בא},\text{לב}\}$$

$$A\times B=\{(1,1),(\text{לב},1),(2,1),(\text{בא},2)\}$$

דוגמא:

$$|F^n|=\underbrace{|F|\times|F|\times|F|\times\ldots\times|F|}_{n\text{ פעמים}}$$

דוגמא:

הוכיחו/ הפריכו:

יהיו A,B,C,D קבוצות. אזי $A\times B=C\times D\iff A=C,\ B=D$

$\Leftarrow$ אם $A=C$ ו $B=D$ קרוב ל- $A\times B=C\times D$

$\Rightarrow$ נניח $A\times B=C\times D$ ו $A=C$ ו $B=D$

$A\in C$: יהי $a\in A$ ו $C\ni a$

נקח $(a,b)\in A\times B$ אזי $(a,b)\in C\times D$

אזי $a\in C$, $b\in D$

יש הסיבה ב- קיים $b\in B$ כי אחרת $B=\emptyset$ וזו סתירה!

הערה:

יהי קבוצה A אזי

$$A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$$

על הטענה הזאת מהם אחד האיברים מהקבוצה הריקה ! השני מ- A

מסקנה -

$A\neq C$ $B=D=\emptyset$

אזי $A\times B=C\times D=\emptyset$

הערה:

אם A,B,C,D אינן ריקות, הטענה נכונה.

Scanned by CamScanner

יחסים

יחס הוא דרך הכללה של 2 דברים האם הם "מתייחסים" זה לזה או לא.

"אוהב את", "גדול או שווה", "שווין", "הפרה", "שייט"

הגדרה מתמטית:

תהיינה 2 קבוצות A,B אזי היחס מ-A ל-B הוא

$R \subseteq A \times B$ אם $(a,b) \in R$ אומרים

שמקיים את היחס R עם b $= aRb$.

כאשר $(a,b) \notin R$ אומרים שa לא מתייחס לb $a \not R b$

דוגמאות:

$B = \{1,2\}$ $A = \{1,2,3\}$ $R = \{(1,1),(2,2),(3,1)\}$

2 מתייחס ל2 אך 3 לא מתייחס ל-2

שאלה:

האם הפרה ושייט הם בהכרח יחסים? (בהגדרה המתמטית)

לא כי אין קבוצה של הקבוצה

דוגמאות:

אפשר להגדיר שייט או הפרה באמצעות פרטים

נגדיר R יחס בין M ל-$P(M)$

$$R \subseteq M \times (P(M))$$

$$R := \{(x,A) \mid x \in A\}$$

R הוא יחס שייט בין M ל-$P(M)$

$(2,\{2\}) \in R$ $(2,\emptyset) \notin R$

הגדרה:

תהי A קבוצה ויהי R יחס מ-A ל-A,

אזי אומרים ש-R יחס על A.

Scanned by CamScanner

דוגמאות:

$R \subseteq A \times B$ יחס $R = \emptyset$ עבור A, B קבוצות כלשהן.

דוגמאות:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ פונקציה

$R = \{(1,1), (1,-1), (2,4), \ldots\}$

תכונות של יחסים

1. **רפלקסיביות:**

יהי R יחס על A. R נקרא רפלקסיבי אם $\forall a \in A : aRa$

R רפלקסיבי אם על איבר מ-A מתיחס לעצמו.

דוגמאות:

היחס '$\geq$' על $\mathbb{N}$ רפלקסיבי כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \geq n$.

אבל היחס '$>$' אינו רפלקסיבי על $\mathbb{N}$ כי $1 \not> 1$.

נתבונן R על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$ARB \Leftrightarrow A \cap \{1,2,3\} = B \cap \{1,2,3\}$$

נוכיח כי R רפלקסיבי:

יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ צ"ל ARA

צ"ל $A \cap \{1,2,3\} = A \cap \{1,2,3\}$ ברור. $\forall a \in A : aRa$

דוגמאות:

נגדיר $R = \{(1,2)(1,1)\}$ יחס על A

האם R רפלקסיבי? $2 \in A$ אבל $(2,2) \notin R$ $(2 \not R 2)$

אכן R אינו רפלקסיבי.

דוגמאות:

נגדיר R יחס על A $R = \{(1,2)(1,1)(2,2)\}$

על מנת שנוכל לומר כי R רפלקסיבי, כפי שראינו לעיל מהי קבוצה A.

שמתקיים כי $A = \{1,2\}$ R רפלקסיבי.

אבל כאשר $A = \{1,2,3\}$ R אינו רפלקסיבי כי $3 \not R 3$.

Scanned by CamScanner

דוגמה:

$A = P(\mathbb{N})$ (קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$) R יחס על A

$R := \{(X,Y) \mid X \cap Y \neq \emptyset\}$ $X,Y \in P(\mathbb{N})$

$\{1,2\} R \mathbb{N}$

$\{$ זוגיים $\} \not R \{$ זוגיים $\}$

האם R רפלקסיבי? לא כי $\emptyset \not R \emptyset$ כי $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

2. סימטריות:

יהי R יחס על A. R נקרא סימטרי אם $\forall a,b \in A : aRb \to bRa$

R סימטרי אם לכל 2 איברים a,b מתקיים $(a,b),(b,a) \in R$

או $(a,b)(b,a) \notin R$

דוגמה:

$R = \emptyset$ על A. R סימטרי.

כי $\forall a,b \in A : aRb \to bRa$ ו aRb שקר, לכן תמיד אומת.

האם R רפלקסיבי? אם $A \neq \emptyset$ לפחות!

קיים $a \in A$ $a \not R a$

אם $A = \emptyset$ כן! מהלמ"ן כיוון.

דוגמה:

$R = \{(1,2),(1,1),(2,1),(1,3)\}$ אינו סימטרי כי $(3,1) \notin R$

$S = \{(1,2)(1,1)(2,1)\}$ סימטרי אבל אינו רפלקסיבי $(2,2) \notin S$

דוגמה:

יחס R על $\mathbb{R}$ ע"י

$xRy \leftrightarrow |x-y| < 1$

האם R רפלקסיבי? כן יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש xRx $|x-x| < 1$

האם R סימטרי? כן יהיו $x,y \in \mathbb{R}$ כך ש xRy

כך xRy כאשר $|x-y| < 1$ כך $|y-x| < 1$

מ.ש $|x-y| = |y-x|$

דוגמאות:

$A = P(\mathbb{N})$ $\quad X R Y \leftrightarrow X \setminus Y = \emptyset$

הוכיחו R רפלקסיבי

יהי $X \in P(\mathbb{N})$ צ"ל $X R X$ $\leftarrow$ צ"ל $X \setminus X = \emptyset$ נכון.

הוכיחו R סימטרי?

$X = \{1,2,3\}$ $\quad Y = \{1,2\}$ $\quad X R Y$ אבל $Y R X$

מכאן R אינו סימטרי.

דוגמא:

$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (שבהיר R על A $\quad (a,b) R (c,d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

הוכיחו R רפלקסיבי?

יהי $(a,b) \in A$ צ"ל $(a,b) R (a,b)$ צ"ל $a \cdot b = b \cdot a$ ✓

הוכיחו R סימטרי?

יהיו a מתאימים $(a,b), (c,d) \in A$ נניח $(a,b) R (c,d)$

צ"ל $(c,d) R (a,b)$ נתון $a \cdot d = b c$ צ"ל $c \cdot b = d \cdot a$ קורא ✓

3

טרנזיטיביות:

יחס R על A. R נקרא טרנזיטיבי אם

$\forall a,b,c \in A : (aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$

דוגמאות:

$\geq$, $\subseteq$

דוגמא חשובה:

$A = \mathbb{Z}$ (שבהיר של יחס "מחלק את" מסומן $a|b$ $\quad \left(\frac{b}{a}\right)$

$a|b$ אם קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $b = m \cdot a$

(אפשר שבהיר הכל מעל $\mathbb{N}$)

* הוכיחו רפלקסיבי?

יהי $a \in \mathbb{Z}$ צ"ל $a|a$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $a \cdot m = a$

נבחר $m = 1$ ואכן $a = 1 \cdot a$ מתקיים. רפלקסיבי

* הוכיחו "מחלק את" סימטרי?

$4|2$ אבל $2|4$ כי $4 \cdot m \neq 2$ $\quad |4 \cdot m| \geq 4$

Scanned by CamScanner

הוכח: "מתלת שב' טרנזיטיבי?

יהי $a,b,c \in \mathbb{Z}$ כך ש $a|b \wedge b|c$

צ"ל $a|c$

מאחר ו $a|b$ קיים m כך ש- $b = m \cdot a$ I

ומאחר ו $b|c$ קיים n כך ש- $c = n \cdot b$ II

צ"ל קיים k כך ש- $c = k \cdot a$ III

נציב I במשוואה II ונקבל $c = n \cdot m \cdot a$

מאחר $n \cdot m = k$ מקיים את הדרוש. מ"ש טרנזיטיבי.

דוגמא:

$A = \mathbb{R}$ (בדיר R על A

$xRy \leftrightarrow |x-y| < 1$

הוכח R טרנזיטיבי?

$x=1$ $y=1.5$ $z=2.1$ yRz ו xRy אבל xRz

לכן xRz סתירה לטרנזיטיביות!

דוגמא נוספת

נתון $R = \{(1,2), (2,1)\}$

הוכח R טרנזיטיבי?

עבור $2R1$, $1R2$ נקבל $1R1$.

ועבור $1R1$, $2R1$ נקבל $2R2$.

דוגמא נ':

$R = \{(1,2)\}$

הוכח R טרנזיטיבי?

כן, $\forall a,b,c \in A: aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

שקר ← לכן מצאנו את ואמנם

Scanned by CamScanner

יחס הזהות

הגדרה:

תהי A קבוצה, נסמן את יחס הזהות I_A על A

$$I_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$$

תרגיל בית:

למדינות יש 3 הסכמים על יחס הזהות.

דוגמה:

$$R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$$

האם R טרנזיטיבי? לא

חסר $(1,3)$ $(2,4)$

$$R = \{(1,2)(2,3)(3,4)(2,4)(1,3)\}$$

אך"ן אינו טרנזיטיבי כי חסר $(1,4)$

הגדרה:

תהי A קבוצה.

אוסף תתי קבוצות של A, A_i נקרא חלוקה של A, אם:

① האיחוד של כל תתי הקבוצות הוא A $\quad A = \bigcup A_i$

② לכל i, j $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$ אזי $A_i = A_j$

③ לכל i $\quad A_i \neq \emptyset$

דוגמה:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

חלוקה של A $\quad A_i = \{\{1,3\},\{4\},\{2,5\}\}$

יחס שקילות הוא כי נקבל חלוקה.

דוגמה:

אדם בא מיידע לחברים כי אם יש לכל אחד בדיוק ערוץ כמו ל-כל יחס מה מיצג את חלוקת האנשים בקולם לפי בדיוק ערוץ.

יחס שקילות

תהי A קבוצה. יהי R יחס על A

R נקרא יחס שקילות אם R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמא:

נגדיר על $\mathbb{Z}$ את היחס R - $xRy \Leftrightarrow x=y \bmod 2$

הוכחה:

$x=y \bmod 2$ $\Leftrightarrow$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x-y=2m$

נוכיח כי R יחס שקילות:

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{Z}$ אז aRa כי $a=a \bmod 2$ ברור

סימטריות:

יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ כך ש aRb. אז bRa.

נתון: $a=b \bmod 2$ אז $b=a \bmod 2$ ברור.

טרנזיטיביות:

יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ כך ש aRb bRc אז aRc

נתון $a=b \bmod 2$, $b=c \bmod 2$

אז $a=c \bmod 2$ ברור.

דוגמא:

$\forall a,b,c,d \in A \quad (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$

הוכיחו כי R יחס שקילות.

נוכיח כי R רפלקסיבי וסימטרי שכן ברור כי R טרנזיטיבי.

טרנזיטיביות:

יהיו $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ כך ש-

$(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$ אז $(a,b)R(e,f)$

נתון: $ad=bc$, $cf=de$ אז $af=be$

$\frac{ad}{de} = \frac{bc}{cf}$ $\Leftarrow$ $af=eb$ מ.ש.ל

אפשר כי $a,b,c,d \neq 0$ אחרת היחס מחלק את A

לפי הגדרת השוויון שמופיעה על שולחן הלוח הדרג'נלי

דוגמא:

$$\frac{1}{2} = \{(1,2),(2,4),(3,6),\dots\}$$
$$\frac{1}{3} = \{(1,3),(3,9),(2,6)\dots\}$$

עם מעט מחשבה אפשר להבין את הקבוצה הבאה

$$A = \left\{ (a,b) \mid \begin{matrix} a,b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

הגדרה:

יהי A קבוצה ו- $\{A_i\}$ חלוקה של A אז נגדיר יחס R על A ע"י

$$xRy \Leftrightarrow \exists i : x,y \in A_i$$

(R הינו היחס המושרה מהחלוקה)

נכיח R יחס שקילות:

רפלקסיביות:

יהי $x \in A$ צ"ל xRx כלומר $\exists i : x,x \in A_i$

נשים ל- $\bigcup A_i = A$ ולכן $x \in \bigcup A_i$ $\Leftarrow$ $\exists i : x \in A_i$ ✓

סימטריות:

יהיו $x,y \in A$ כך ש- xRy צ"ל yRx

נשים $\exists i : x,y \in A_i$ צ"ל $\exists j : x,y \in A_j$ כאשר $i=j$ ✓

טרנזיטיביות:

יהיו $x,y,z \in A$ כך ש- $xRy \wedge yRz$ צ"ל xRz

נשים לב $x,y \in A_i$ נקיים j $y,z \in A_j$

צ"ל קיים k $x,z \in A_k$

נכיח ש- $A_i = A_j$ כלומר $\emptyset \neq A_i \cap A_j \ni y$ כלומר $A_i = A_j$

כאשר $i=j=k$ וברור ש $x,y,z \in A_i$ וברור $x,z \in A_k$

Scanned by CamScanner

מחלקת שקילות

יהי R יחס שקילות על A

ויהי $a \in A$ נציג את מחלקת השקילות של a לפי היחס R ע"י:

$$[a]_R := \{ b \in A \mid aRb \}$$

כלומר מחלקת השקילות של a היא קבוצת כל האיברים שמקיימים

את התכונה עם a

דוגמא:

R מוגדר על $\mathbb{Z}$

$$xRy \iff x = y \bmod 3$$

נמצא את מחלקת הקונגרואנציה

$$O_R = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots \}$$

$$1_R = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots \}$$

$$2_R = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$$

קבוצת המנה היא אוסף כל מחלקות השקילות

אוסף כל מחלקות השקילות $= A/_R$.

הדוגמא שלנו:

$$\mathbb{Z}/_R = \{ [0]_R, [1]_R, [2]_R \}$$

הגדרה

יחס על A הוא כל $R \subseteq A \times A$

רפלקסיביות:

כל איבר ב-A מתייחס לעצמו

סימטריות:

אם a מתייחס ל-b אז גם b מתייחס ל-a.

טרנזיטיביות:

אם aRb וגם bRc אז aRc

יחס שקילות:

R נקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי.

יחס שקילות $\leftrightarrow$ חלוקה של A

דוגמא:

נגדיר יחס R על $\mathbb{Z}$ $aRb \leftrightarrow \exists n: a|b^n \vee b|a^m$

האם R יחס שקילות?

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{Z}$ אז aRa

טענה: קיים n כך ש- $a|a^n$ וקיים m כך ש- $a|a^m$

נבחר $n=m=1$

סימטריות:

יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ כך ש aRb אז bRa

נניח קיומים מ.מ כך ש- $b|a^m$, $a|b^n$

אז שקיימים מ.מ $a|b^n$, $b|a^m$ נכון.

טרנזיטיביות:

יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ כך ש- aRb ו- bRc אז aRc

נניח שקיימים מ.מ k,p כך ש- $a|b^p$ ו- $b|c^k$

$l,t \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a|c^l$ ו- $c|a^t$

$a|b^n \rightarrow b^n = x \cdot a$ $\quad b|c^k \rightarrow c^k = y \cdot b$

$a|c^{nk} \leftarrow c^{nk} = y^n \cdot b^n = y^n \cdot x^n \cdot a$ $\quad nk = l$ אז

Scanned by CamScanner

שכן R הינו יחס שקילות.

נמצא את $R/\mathbb{N}$ (קבוצת המנה).

הערה:

קבוצת המנה, היא אוסף כל מחלקות השקילות.

כיצד מתקיים מחיפוש והמנע מחלקת השקילות?

שלוקחים איזהו האחד (הכי "פשוט") ומוצאים את מחלקת השקילות שלו.

כלומר, נמספס איזה שהוא שקול שאיזהו הקודם, ונמשיך הלאה.

נמצא את מחלקת השקילות של 1

$$[1]_R = \{a \in \mathbb{N} \mid aR1\} = \{1\}$$

כלומר $1 = a \cdot x$ ומתקיים $a|1$ ו $a|1^m$ $a=1$

$$[2]_R = \{a \in \mathbb{N} \mid aR2\} = \{2, 4, 8, 16 \dots\}$$

$a|2^m$ ו $a|2^n$ כאשר a חזקה של 2

$$[3]_R = \{3, 9, 27 \dots\}$$

$$[5]_R = \{5, 25, 125 \dots\}$$

$$[6]_R = \{a \in \mathbb{N} \mid aR6\} =$$

$$4 \in [2]_R$$

$a|6^n$ ↓ $a|6$ ↓

a מתחלק רק ב-2,3 ולכן בהכרח אחד. a מתחלק ב-2,3

מסקנה:

aRb אם ורק אם יש להם אותם גורמים ראשוניים

(מי הוכחה ברשת □).

משפט:

יהי R יחס שקילות על A, אז קבוצת המנה A/R היא חלוקה של A.

$\{A_i\}_{i\in I}$ נקראת חלוקה של A אם:

1. $A = \bigcup_{i\in I} A_i$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ עבור $i,j \in I$ אז $A_i = A_j$
3. עבור $i \in I$ $A_i \neq \emptyset$

הוכחה:

קבוצת המנה $A/R = \{[a]_R\}_{a\in A}$

1. צ"ל $A = \bigcup_{a\in A} [a]_R$

צ"ל $A \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_R$

יהי $x \in A$ צ"ל $x \in \bigcup_{a\in A} [a]_R$

נשים לב $a \in A$ כך ש $x \in [a]_R = \{y \in A \mid aRy\}$

לכן $x \in A$

צ"ל $A \supseteq \bigcup_{a\in A} [a]_R$

יהי $x \in A$ צ"ל $x \in \bigcup_{a\in A} [a]_R$

כי xRx (מכיוון ש R יחס שקילות) $x \in [x]_R$

לכן $x \in \bigcup_{a\in A} [a]_R$ **מ.ש.ל**

2. יהי $a,b \in A$ צ"ל $[a]_R = [b]_R$ או $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

אם $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ אומר. שיש $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

לכן צ"ל $[a]_R = [b]_R$

יהי $x \in [a]_R$ צ"ל $x \in [b]_R$

צ"ל $[a]_R \subseteq [b]_R$

קיים $c \in [a]_R \cap [b]_R$ לכן aRc ו- bRc

R סימטרי, לכן cRb וטרנזיטיבי, לכן aRb

נשים aRx צ"ל xRb

לפי סימטריות aRb, xRa לכן xRb **מ.ש.ל**.

עד כאן הוכחה חלקית.

3. יהי $a \in A$ צ"ל $[a]_R \neq \emptyset$

לפי רפלקסיביות שזה $a \in [a]_R$ **מ.ש.ל**.

Scanned by CamScanner

יחס סדר (חלקי)

יחס סדר מאיזה סוג הוא?

יחס סדר חלקי הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי, אבל הוא לא יחס סדר מלא.

הטענה:

יהי R יחס על A

אם R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי, אז R נקרא יחס סדר חלקי.

הטענה:

יהי R יחס סדר חלקי על A

נאמר ש-R יחס סדר מלא (לינארי/ משולה) אם $\forall a,b\in A: aRb \vee bRa$

יהי R יחס על A. אזי מתקיים $\forall a,b\in A: aRb \wedge bRa \rightarrow a=b$

אזי נאמר R אנטי סימטרי.

נובע ש- אזי $a\neq b$ אז aRb ואם bRa

הטענה:

האם יחס סדר רפלקסיבי? כן טרנזיטיבי? כן סימטרי? לא

"$\mid$" - יחס שקול בשלמים כלשהי $5 \mid 5$

הפעה על הבוחן $\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\emptyset\}$

"$\subseteq$" - לא לינארי $\{2\}\not\subseteq\{1\}$, $\{1\}\not\subseteq\{2\}$

"$\geq$" - לינארי $\forall a,b: a\geq b \vee b\geq a$

דוגמאות ליחסי סדר:

אם נוסיף כל a איבריות, יש יחס מכוון בפשוט.

יחס סדר חלק נקרא מלא / לינארי/ משולה,

יחס סדר מאוד עשיר ומגוון

Scanned by CamScanner

דוגמאות

יחס השוויון (שוויון) $I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$

הוכיח שהיחס הנ"ל סימטרי? כן הנ"ל סימטרי? כן הנ"ל טרנזיטיבי? כן

יהיו $a,b,c\in A$ כך ש- $(a,b),(b,c)\in I_A$

אז $(a,c)\in I_A$ מאחר ומתקיים $a=b$, $b=c$ $\Leftarrow$ $a=b=c$

לכן $(a,c)\in I_A$ כי $(a,a)\in I_A$

לכן I_A הוא יחס שקילות ויחס סדר חלקי.

הוא I_A מעל A, אלא אם $|A|>2$

אחרת יש $a,b\in A$ $a\neq b$ $(a,b)(b,a)\notin I_A$

דוגמאות:

האם היחס "מתלק אי" הינו יחס סדר חלקי מעל $\mathbb{Z}$?

הפלוקסיבי? כן הטרנזיטיבי? כן

אנטי סימטרי?

יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ כך ש- $a\mid b$ וגם $b\mid a$ אז $a=b$

לכן היחס אינו אנטי סימטרי לכן אינו יחס סדר חלקי.

דוגמא חשובה:

היחס "מתלק אי" מעל $\mathbb{N}$ כן יחס סדר חלקי.

כיון שהוא הפלוקסיבי וטרנזיטיבי

אנטי סימטרי:

יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש- $a\mid b$ וגם $b\mid a$ אז $a=b$

נניח בדיוק $\exists n,m\in\mathbb{Z}$ $a=mb$ $b=na$

נציב ונקבל $a=mna$ $a\neq 0$ $m\cdot n=1$

לכן $m=n=1$ $a=1\cdot b$ $b=1\cdot a$ לכן $a=b$ מוכח

Scanned by CamScanner

נביט ביחס ההפרדה על הקבוצה של הקבוצות:

רפלקסיבי - כי לכל A $A \subseteq A$

אנטי סימטרי - אם $B \subseteq A$ ואם $A \in B$ אז $A = B$

טרנזיטיבי - כן כי אם $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$

הגדרה:

יהי R יחס סדר חלקי על A

איבר $a \in A$ נקרא מינימלי, אם אין איבר "קטן" ממנו.

$$\forall b \in A : bRa \to b = a$$

איבר $a \in A$ נקרא מקסימלי, אם אין איבר "גדול" ממנו.

$$\forall b \in A : aRb \to b = a$$

איבר $a \in A$ נקרא גדול ביותר (מקסימום) אם הוא גדול ממש

$$\forall b \in A : bRa$$

איבר $a \in A$ נקרא קטן ביותר (מינימום) אם הוא קטן ממש

$$\forall b \in A : aRb$$

דוגמא:

לו עמוד השבעה אל אחד ← איבר מקסימלי

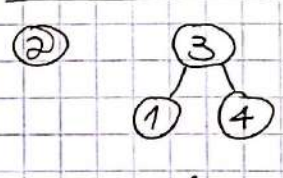
כולם עומדים השבעה ← איבר גדול ביותר

דוגמא:

$A = \{1,2,3,4\}$ $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(4,3)\}$

R רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי לכן יחס סדר חלקי.

נצייר דיאגרמה של הסדר:

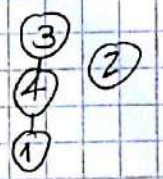


איברים מינימלים: 1, 4, 2

איברים מקסימלים: 3, 2

אין גדול ביותר ואין קטן ביותר.

(אם בנוסף היה נתון $(1,4) \in R$ אז

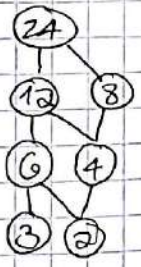


)

Scanned by CamScanner

דוגמא:

$A=\{2,3,4,6,8,12,24\}$ נביט ביחס "מחלק את" על A



איברים מינימלים: 2,3

אין קטן ביחס

איברים מקסימלים: 24

גדול ביחס: 24

טענה:

יהי A קב' (קבוצה סדורה חלקית) סופית מ"ד על"י יחס סדר חלקי $\leq$ אם $a\in A$ איבר שדרך היחס יחיד ושהוא מקסימלי יחיד.

אזי a הוא גם הגדול היחיד.

הוכחה:

יהי a איבר שדרך היחס ויהי b איבר שדרך היחס. נניח $b\neq a$

a שדרך היחס אזי $b\leq a$ (שהרי $\leq$ מקיים את יחס הסדר הקטן שווה $\leq$ פי קשר ליחס הידוע $<$ בין מספרים)

מאופן בחירת $a\neq b$ ולפי אנטי סימטריות $b=a$

(בפרט ש aRb אזי $b=a$)

נובע ש- a מקסימלי. נניח בשלילה ש- a אינו מקסימלי, אזי קיים $b\neq a$ כך ש- $b\leq a$ ($\exists b\in A: aRb\wedge b\neq a \Rightarrow \forall b\in A: aRb\rightarrow a=b$)

a שדרך היחס אזי $b\leq a$ לפי אנטי סימטריות $b=a$ סתירה!

נניח ש- b הוא מקסימלי ונובע $b=a$

a שדרך היחס אזי $b\leq a$ b מקסימלי ולכן $b=a$

דוגמא:

הוכיחו שאיבר שדרך היחס הוא מקסימלי יחיד.

האם כל איבר מקסימלי ויחיד הוא שדרך היחס?

אין תועלת לסוסי הרי שמה מיכן ואילך (תרשים $\square$ והיטח).

אלו קווים אינם סוסי התשובה מיכן לא

Scanned by CamScanner

תרגיל

$\mathbb{Z} \cup \{\text{פיתגורס}\}$

① $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ נסמן $aRb \leftrightarrow a \leq b$

② $\{\text{פיתגורס}\} R \{\text{פיתגורס}\}$

③ פיתגורס מתמטיקאי ובמה מיוחד בשניהם

אך אסתר אינה מתמטיקאי כי לפי נסמן יש סדנא מתמ'

פיתגורס אינו סדנא יוצא כי לעומת $\{\text{פיתגורס}\} \not\subset 1$

Scanned by CamScanner

תרגילים

תרגיל מחלקה:

נגדיר באופן הבא את היחס R על קבוצת הפונקציות $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$$fRg \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: f(n)-g(n) \neq (-1)^n$$

א. הוכיחו R יחס סדר חלקי.

ב. האם R מלאה?

ג. מצאו את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר אם הם קיימים.

פתרון:

א. **רפלקסיביות:**

צ"ל: $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}: fRf$

$$f(n)-f(n) \neq (-1)^n$$

אנטי סימטריות:

תהינה f,g כך ש- fRg ו- gRf

נשים לב שמכך ש- $f(n)-g(n) \neq (-1)^n$ ומכך ש- $g(n)-f(n) \neq (-1)^n$

$f-g \neq 1$ ו- $g-f \neq 1$ אם n זוגי

$f-g \neq -1$ אם n אי זוגי חסרת זוגי.

$f-g \in \{1,0,-1\}$

לכן $f-g=0$ כלומר $f=g$

טרנזיטיביות:

תהינה f,g,H כך ש- fRg ו- gRH

צ"ל fRH

נשים לב: $\forall n: f(n)-g(n) \neq (-1)^n$, $\forall n: g(n)-H(n) \neq (-1)^n$

צ"ל $\forall n: f(n)-H(n) \neq (-1)^n$

יהי n. אם n זוגי $g(n)-H(n) \neq 1$, $f(n)-g(n) \neq -1$

צ"ל $f(n)-H(n) \neq 1$

נניח בשלילה $f(n)-H(n)=1$ לכן $f(n)=1$, $H(n)=0$ (אפשרות יחידה)

נשים לב מהנתון $g(n)=1$ אזי $g(n)-H(n)=1$ סתירה!

לכן n אי זוגי חסרת זוגי.

Scanned by CamScanner

א. נניח בשלילה ש- f, g כך ש- fRg וגם gRf.

אז $g(1)-f(1)=(-1)$ ← gRf אבל $g(1)=0$ $f(1)=1$

סתירה את נניח f, g כך ש- $g(1)=0$ ו- $f(1)=1$

fRg.

$f(2)-g(2)=1$ אפשרי fRg -ש כך $f(2)-g(2)\neq 1$

$g(2)=0$ $f(2)=1$

נניח f, g כך ש- $f(1)=1$, $f(2)=1$

$g(1)=0$ $g(2)=0$

אבל gRf fRg

סתירה נניח $f\equiv 1$ $g\equiv 0$ הרי fR^2g

הוכח $\forall n: 1-0\neq(-1)^n$? נכון לכל n.

ב. **מסקנות:**

fRg ← g עבורה קיימת f כך ש-

$f(n)-g(n)\neq(-1)^n$ עבורו g עבורה קיימת f כך ש-

אם n זוגי: $f(n)-g(n)\neq 1$ אז $f(n)=0$ בהכרח

אם n אי זוגי: $f(n)-g(n)\neq -1$ אז $f(n)=1$

$f(n)=\begin{cases}0 & n \text{ זוגי}\\ 1 & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$ נגדיר f כך ש- g עבורה קיימת fRg.

$g(n)\begin{cases}1 & n \text{ זוגי}\\ 0 & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$ באופן דומה הרי מתקיים.

Scanned by CamScanner

תהי A קב'. מינימלים/מקסימלים או מינימום/מקסימום.

אומרים שלאבר $x \in A$ הוא מינימלי/מקסימלי או מינימום/מקסימום ב- A אם

דוגמאות:

$A = \{1,2,3\} \subseteq$ יחס הסדר "גדול שווה"

מינימלים: 1

קטן ביותר: 1

מקסימלים: 2,3

איבר גדול ביותר: אין

הגדרה:

יהי A קב' ויחס R ותהי $X \subseteq A \neq \emptyset$

איבר $M \in A$ נקרא חסם מלעיל של X אם לכל $x \in X$

$x R M$

איבר $M \in A$ נקרא חסם מלרע של X אם לכל $x \in X$

$M R x$

דוגמאות:

① $A = \{1,2,3\}$ R ← "גדול שווה"

חסם מלרע: 1

הערה: המינימום הוא גם חסם מלרע.

חסמי מלעיל: 3, 12, 81 ... כל מספר שמתחלק ב- $\{1,2,3\}$

② $A = \emptyset$ R ← "$\leq$" קבוצת שווה

חסם מלעיל של X: 2

אבן את $\frac{b}{d} \in X$ ← $2 > \left(\frac{b}{d}\right)^2$

בגלל $2 \geq \frac{b}{d}$ נובע בהכרח ש- $2 < \frac{b}{d}$ לכן $4 < \left(\frac{b}{d}\right)^2$ סתירה

$X = \left\{ \frac{b}{d} \in \emptyset \mid \left(\frac{b}{d}\right)^2 < 2 \right\}$

③ $\mathcal{P}(M)$ עם יחס הכלה "$\subseteq$"

חסם מלרע: $\emptyset$ כי $\emptyset \subseteq \{1\}$, $\emptyset \subseteq \{2\}$

חסמי מלעיל: $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ $\{1,3\}, \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

$X = \{\{1\}, \{2\}\}$

הגדרה:

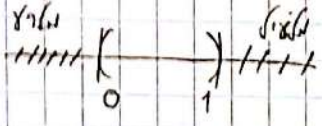
תהי A קס"ח עם יחס $\leq$ ותהי $X \subseteq A$ תת
אם X חסומה מלעיל (קיים לה חסם מלעיל)
ויש איבר קטן ביותר בקבוצה חסמי המלעיל של
אזי הוא נקרא **החסם העליון** של X. ($\sup(X)$)
באופן דומה האיבר הגדול ביותר בקבוצה חסמי הגרף של X
נקרא **חסם תחתון** של X. ($\inf(X)$)

דוגמאות:

$A = \mathbb{R}$ היחס "$\leq$" $X = (0,1)$

חסם עליון: 1.

חסם תחתון: 0



למה:

אם ב-X יש איבר גדול ביותר (מקסימום) אזי הוא גם חסם עליון
במובן שהגדרנו הוא חסם תחתון.

הוכחה:

נסמן ב-$x \in M$ את המקסימום של X כך ש-M חסם עליון.
כך M האיבר הקטן ביותר בקבוצה חסמי המלעיל.
ראשית נכונה ש-M חסם מלעיל. כך $\forall x \in X \quad xRM$
נוכיח שכל המקסימום שכן M חסם מלעיל.
נראה שלכל a כך ש-M הקטן ביותר בקבוצה חסמי המלעיל.
כך שכל חסם מלעיל של X גדול או שווה ל-M
ותי $a \in A$ חסם מלעיל של X כך aRM
מהגדרה של חסם מלעיל לכל $x \in X$ מתקיים xRa
ובפרט עבור $x \in M$ מתקיים MRa מש"ל.

Scanned by CamScanner

תזכורת:

יהי A חלק מקבוצה עם יחס הסדר.

ויהי $\emptyset \neq S \subseteq A$

נסמן את $\sup(S)$ ואת $\inf(S)$ אם הם קיימים.

יהי $X \in A$ חסם מלעיל של S שמקיים את התנאי הבאים.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $s \in S$ כך ש- $s > X - \varepsilon$

אנו מבקשים ש-:

$X \notin S$ אז $X \in A$ מבין כל החסמים מלעיל של S ונקרא לזה $\sup S$

נשווה את ההגדרה הנ"ל כי $\sup S \in A$, אז

תרגיל:

נניח כי $US = \sup(S)$

נוכיח: ① US חסם מלעיל של S

② US הוא החסם הקטן ביותר מבין החסמים מלעיל של S.

① $US \in A$ כיוון ש $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in S$ שמקיים $US \geq x$ מהי

② אם $M \in A$ חסם מלעיל של S אז $US \leq M$ מוגדר

כיוון ש $\forall x \in S$ מתקיים $x \leq M$.

יהי $US \in X$ אז $\exists M \in X$ קיים $s \in S$ כך ש- $x \in X$

אזי $M \geq X$ לכן $M \in X$

סה"כ $US = \sup(S)$

נוכיח כי $LS = \inf(S)$

$\exists$ ① LS חסם מלרע של S

② LS הגדול ביותר מבין החסמים מלרע של S.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in S$ שמקיים $x \geq LS$

מהי מהצורה הבאה (לפי ההגדרה).

② יהי $M \in A$ חסם מלרע של S אז $LS \geq M$

M חסם מלרע לכן לכל $x \in S$ $X \geq M$

יהי $a \in M$ אז $\exists a \in S$. $\forall x \in S : a \in X$

אזי לכל $x \in S$ מתקיים $x \geq M$ ולכן $a \in X$ מלכ"ש

Scanned by CamScanner

הגדרה:

נתון ה- $\mathbb{R}$ עם היחס $X = \{a_1 \dots a_n\}$

$\sup(X)$ - המינימום המשותף

$\inf(X)$ - המקסימום המשותף

למשל:

$X = \{2, 3, 12, 5\}$

$\inf(X) = 1 = g.c.d$

$\sup(X) = 60 = l.c.m$

הגדרה:

$A = \emptyset$ עם היחס "$\geq$" $X = \{m \in \emptyset \mid m \geq 2^m\}$

הוכיחו כי X אין חסם עליון למרות שהוא חסום מלעיל.

* אם $A \supseteq X$ אינה חסומה מלעיל, במידה שאין לה חסם עליון מהתכונה.

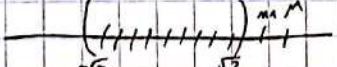
$\emptyset \subseteq M$ ל- M אין חסם מלעיל ובמילואי אין חסם עליון.

משפט:

בין כל 2 מספרים ממשיים שונים, קיים איבר רציונלי אחד לפחות ביניהם.

הוכחה:

נתון x חסומה מלעיל למשל על ידי 2



נניח בשלילה שקיים $M \subseteq \emptyset$ שהוא חסם עליון של X.

לכן לכל $x \in X$ $x \leq m$ ומכאן כן לכל חסם מלעיל M של X

מתקיים $M_1 \geq M$

$\emptyset \subseteq M$ לפיכך $\sqrt{2} < m$ אזי $\sqrt{2} < M$

אזי $\sqrt{2} > M$ אבל קיים מס רציונלי $\sqrt{2} > m > M$ כך ש- $2 > 2^m$

בסתירה לכך ש M חסם מלעיל של X

לפי $\sqrt{2} < M$ ולכן קיים $M > m_1 > \sqrt{2}$ ולכן קיים m_1 חסם מלעיל של X קטן יותר מ- M בסתירה לכך ש M חסם מלעיל הקטן ביותר.

Scanned by CamScanner

הסבר שבעיה:

מצא b בין כל 2 מספרים שונים, מספר רציונלי:

$$1.24638\ldots \quad < \quad 1.24647\ldots \quad < \quad 1.2464 = \frac{12464}{10,000}$$

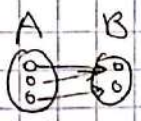
פונקציות

הגדרה:

יהי $R \subseteq A \times B$ יקרא חד ערכי, אם לכל $a \in A$ לכל $b, c \in B$

$$aRb \wedge aRc \rightarrow b = c$$

לכל איבר ב-A יש לכל היותר תל אחד וזהו



הגדרה:

יהי $R \subseteq A \times B$ יקרא שלם, אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$

כך ש- aRb. לכל איבר ב- A יש לפחות תל אחד וזהו.

הגדרה:

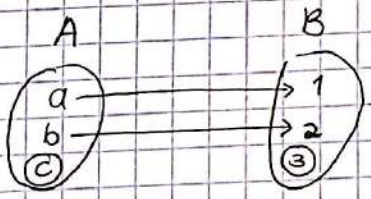
פונקציה תהיה שלשה (f, A, B) כך ש-

A, B קבוצות $f \subseteq A \times B$ ח"ז ושלם.

A נקרא התחום של הפונקציה ו B נקרא הטווח.

דוגמא:

$A = \{a, b, c\}$ אינה שלמה לכן אינה פונקציה $f = \{(a,1), (b,2)\}$



סימונים: $f : A \rightarrow B$

A נקרא התחום של f, B נקרא הטווח של f

$$a f b \Leftrightarrow f(a) = b$$

הסימון הנ"ל מבין כי לכל a קיים b יחיד כך ש- afb.

Scanned by CamScanner

הגדרה:

יהי $f: A \to B$ פונקציה

f נקראת חח"ע (חד-חד-ערכית) אם לכל $x_1, x_2 \in A$ אם $f(x_1) = f(x_2)$

אז $x_1 = x_2$. כלומר אין ב-B יותר מ-1 איבר שנכנס אותה.

הגדרה:

f נקראת **על**, אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש

$f(a) = b$ כלומר אין ב-B שום איבר שלא נכנס אחד נכנס

דוגמא:

$$f(x) = x^2$$

האם f חח"ע הם f על?

$f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ חח"ע ועל

$f(1) = f(-1)$ אבל לא חח"ע

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) \neq (-1)$ לכן לא על

הגדרות

פונקציה $f:A\to B$ היא שלשה (f,A,B)

A קבוצה הנקראת תחום

B קבוצה הנקראת טווח

$f\subseteq A\times B$ יחס חח"ע ועל

$f:A\to B$ נקראת חח"ע אם לכל $x_1,x_2\in A$ מתקיים

$f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2$

$f:A\to B$ נקראת על אם לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש

$f(a)=b$

דוגמא:

נתון $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הישר $f(x)=ax+b$ $a\neq 0$

הוכח כי f חח"ע ועל

הוכחה:

חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל $x_1=x_2$

נניח $ax_1+b=ax_2+b$

$x_1=x_2$ ← $ax_2=ax_1$ $(a\neq 0)$

על: יהי $y\in\mathbb{R}$ צ"ל $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x)=y$

x כך ש $ax+b=y$ (y פרמטר, x משתנה)

$x=\frac{y-b}{a}$. (אפשר לוודא שזו התשובה ולהציב)

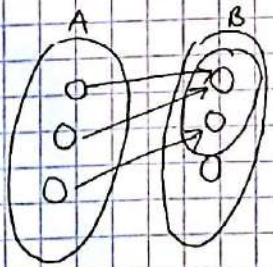
הגדרה:

יהי $f:A\to B$ פונקציה.

נגדיר את התמונה של f $\mathrm{Im}(f):=\{b\in B\mid \exists a\in A: f(a)=b\}$

ל התיאורים בגד שיש להם מקור, תמונה יש להם חץ נכנס.

דוגמא:



$\mathrm{Im}f$ ←

$\mathrm{Im}(f)\subseteq B$

תמיד מוכל בטווח.

$f:A\to A$ על ↔ $\mathrm{Im}(f)=B$

Scanned by CamScanner

מסקנה:

תהי $f:A\to B$ פונקציה, אזי $f:A\to \mathrm{Im}\, f$ שמ"ם פונקציה והיא על.

אקסיומת הבחירה:

יהי אוסף הקבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אזי קיימת פונקציה $(A_\alpha\neq\emptyset)$

$f:\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\to\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ כך שלכל $\alpha\in I$ $f(A_\alpha)\in A_\alpha$

(f נקראת פונקציית הבחירה)

דוגמא:

$f:\{[0,a]\}\to\mathbb{R}$ $f([0,a])=0$ ולכן $0\in[0,a]$

דוגמא:

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמוגדרת ע"י $f(a,b)=a$, אחד ע"ע.

דוגמא:

$A=\{\{a,b\}\mid a,b\in\mathbb{N}\ a\neq b\}$ $f(\{a,b\})=a$ (או חשוב לסדר)

$f(\{a,b\})=\max\{a,b\}$ $f(\{2,1\})=f(\{1,2\})=2$

דוגמא:

תהי A $X=\{\{a,b\}\mid a,b\in A\ a\neq b\}$

$f:X\to A$ בדיק אקסיומת הבחירה.

דוגמא:

תהי $f:A\to B$ על וחד חד ערכית.

האם אפשר "לצמצם" את A כך שתהפוך לח"ע.

(מבלי לפגוע בתמונה)

בדיק את אקסיומת הבחירה מקיימת פה.

קחי איבר b ב"ט מקוד שתרים ובדיק לפחות בקודם **1** אחד.

הגדרה:

תהי $f:A\to B$ נגדיר את פונקציית התמונה ופונקציה ההפוכה

$f[\,]:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B)$ $f^{-1}[\,]:\mathcal{P}(B)\to\mathcal{P}(A)$

הסימון $f^{(-1)}$ אינו קשור לשום הופכי.

קחי f ו"ש פונקציה רגילה, בין אם f הפיכה ובין אם לאו

$f[X]:=\{y\in B\mid \exists x\in X: f(x)=y\}$ קרוי התמונה של איברים ב-X.

Scanned by CamScanner

דוגמא

$f:\{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ $\quad f(3)=a \quad f(2)=b \quad f(1)=a$

$f^{-1}[\{a\}] = \{1,3\}$ $\quad f[\{1,2\}] = \{a,b\}$

הגדרה: הרחבת

$f^{-1}[Y] := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ מוגדרת הקודמת

כלל:

$a \in f^{-1}[Y] \leftrightarrow f(a) \in Y$

$b \in f[X] \leftrightarrow \exists x \in X : f(x) = b$

דוגמאות:

① $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ $\quad f[\{a\}] = \{a^2\}$ $\quad f^{-1}[\{1\}] = \{1,-1\}$

② $Im(f) = f[\mathbb{R}] = [0,\infty)$

③ $Im(f) = f(A)$ כלשהי $f: A \to B$ מתקיים

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$f^{-1}[B] = A$ $\quad f: A \to B$ מתקיים

$f^{-1}[Im(f)] = A$

משפט:

תהי $f: A \to B$ פונקציה ותהיינה $C_1, C_2 \subseteq A$

אז הטענה/ המשפט הבאים

$C_1 \subseteq C_2$ אזי $f[C_1] \subseteq f[C_2]$

הוכחה:

$C_1 = \emptyset$ אזי $f[\emptyset] = \emptyset$ $\quad$ (טריוויאלי) $\begin{cases} \text{נכון} & \text{המשפט} / \\ \text{נכון} & \text{המשפט} / \end{cases}$ מהגדרה.

$C_2 = \emptyset$ אזי $C_1 = \emptyset$

נניח שהטענה:

$b \in f[C_1]$ אז $b \in f[C_2]$

נניח: שקיים $x \in C_1$ כך ש- $f(x) = b$

אז קיים $a \in C_2$ כך ש- $f(a) = b$

נבחר $a = x$ ואז כיוון $x \in C_1$ ו $x \in C_1$ אז $x \in C_1$

המשך בשאלה:

א. הוכיחו או הפריכו.

$f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2]$

ניסיון הפרכה:

$\emptyset \cup \emptyset = f(\emptyset)$ ✓

ניסיון הוכחה:

צ"ל: יהי $b \in f[C_1 \cup C_2]$ צ"ל $b \in f[C_1] \cup f[C_2]$

נשים לב קיים $x \in C_1 \cup C_2$ כך ש- $f(x) = b$

אם $x \in C_1$ ← $b \in f[C_1]$

באופן דומה אם $x \in C_2$ ← $b \in f[C_2]$

לכן $b \in f[C_1] \cup f[C_2]$ מ.ש.ל

ב' יהי: $b \in f[C_1 \cup C_2]$ צ"ל $b \in f[C_1 \cup C_2]$

- אם $b \in f[C_1]$ אז קיים $x \in C_1$ כך ש- $f(x) = b$

אז בהכרח $b \in f[C_1 \cup C_2]$

אם $b \in f[C_2]$ הוכחה מאותן דומה. מ.ש.ל.

ג. הוכיחו/ הפריכו

$f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$

צ' יהי: $b \in f[C_1 \cap C_2]$ צ"ל $b \in f[C_2] \cap f[C_1]$

נשים לב קיים $x \in C_1 \cap C_2$ כך ש- $f(x) = b$

נשים לב מכך ש $x \in C_1 \wedge x \in C_1$ לכן $b \in f[C_1]$ וגם $b \in f[C_2]$

לכן $b \in f[C_2] \cap f[C_1]$ מ.ש.ל.

ב' יהי $b \in f[C_2] \cap f[C_1]$ צ"ל $b \in f[C_1 \cap C_2]$

נשים לב $b \in f[C_1]$ וגם $b \in f[C_2]$

קיים $x_1 \in C_1$ כך ש- $f(x_1) = b$

וקיים $x_2 \in C_2$ כך ש- $f(x_2) = b$

הערה: אם נשים לב ש f חח"ע (כלומר ש- $f(x_1) = f(x_2)$ ← $x_1 = x_2$

$f(1) = a$ $f(2) = a$ $C_1 = \{1\}$ $C_2 = \{2\}$

$f[C_2] \cap f[C_1] = \emptyset \neq \{a\}$ לכן הפרכה!

Scanned by CamScanner

דוגמאות:

תהי $f:A\to B$ ותהי $X\subseteq A$

חשוב / הפריכו:

$X=f^{-1}[f[X]]$

אפשר שזה שקול: תהי $Y\subseteq B$ $\leftarrow$ $Y=f[f^{-1}[Y]]$

נסה להוכיח:

'כ': יהי $a\in X$ צ"ל $a\in f^{-1}[f[X]]$

צ"ל $f(a)\in f[X]$, שקיים $x\in X$ כך ש $f(x)=f(a)$ (נבחר $x=a$ כאשר $a\in X$)

'ב': יהי $a\in f^{-1}[f[X]]$ צ"ל $a\in X$

כאשר $f(a)=f[X]$ קיים $x\in X$ כך ש $f(a)=f(x)$ (אם f חד חד ערכית $x=a$ ומיידית)

$f(1)=a$ $f(2)=a$ $X=\{1\}$.

$f[X]=\{a\}$ $f^{-1}[f[X]]=f^{-1}[\{a\}]=\{1,2\}$

$f^{-1}[f[X]]\not\subseteq X$ לכן ההכלה לא...

משפט:

תהיינה A,B קב' כך ש A סופית.

אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע אזי $|A|\leq|B|$

הוכחה:

$A=\{a_1\dots a_n\}$ כיוון ש f חח"ע $f(a_1)\dots f(a_n)$ שונים

ל איברים שלה ב B לכן כמות האיברים ב B הינו לפחות

$|B|\geq n$

משפט:

תהיינה AB כך ש B סופית, אם קיימת $f:A\to B$ על,

אזי $|B|\leq|A|$

הוכחה:

$B=\{b_n\dots b_n\}$ כיון ש f על לכל b_i ו a_i יתכן

$a_n\dots a_1$ שונים בשפע וזה ערכים שלכן $|A|\geq n$

Scanned by CamScanner

מסקנה:

אם A וB סופיות וקיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל

אזי $|A|=|B|$

הרכבת פונקציות

שהפונקציה אחת אחרי השנייה

$$|x| = \sqrt{x^2} \neq x \qquad (\sqrt{x})^2 = x$$

$\sqrt{x^2}$ ← $\sqrt{x}$, x^2 מוגדר רק עבור $x\geq 0$

ההרכבה אינה תלויה בהכרח.

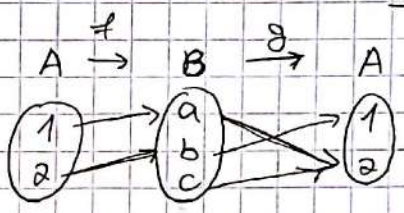
הגדרה:

נתונים A,B,C קבוצות ופונקציות $f:A\to B$ ו- $g:B\to C$

נגדיר פונקציה $g\circ f : A\to C$ ע"י $g\circ f(a) = g(f(a))$

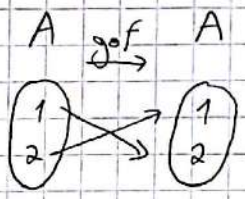
שימו ♥: קל לחשוב שזו אכן פונקציה הוא חח"ע ושלמה.

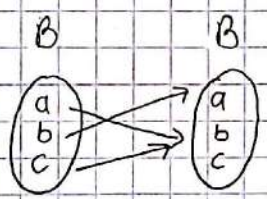
דוגמא 1:



מהי? $g\circ f : A\to A$

מהי? $f\circ g : B\to B$





ראינו פעמים שההרכבה אינה תלויה אפילו אם היא מוגדרת.

משפט:

ההרכבה היא פעולה אסוציאטיבית

כלומר תהיינה A,B,C,D ויהיו f,g,h

אזי: $f:A\to B$ $g:B\to C$ $h:C\to D$

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

Scanned by CamScanner

הערה:

עבור שלוש פונקציות שונות, כך שהתחום של אחת הוא הטווח של זה הפונקציה שלפניה

$(h\circ g)\circ f: A\to D$ $\qquad$ $h\circ(g\circ f): A\to D$

$B\to D$ $\quad$ $A\to B$ $\qquad\qquad$ $C\to D$ $\quad$ $A\to C$

יהי $a\in A$ נשים ב- $h\circ(g\circ f)(a)=(h\circ g)\circ f(a)$

$h\circ(g\circ f)(a)=h(g\circ f(a))=h(g(f(a)))$

$(h\circ g)\circ f(a)=h\circ g(f(a))=h(g(f(a)))$

דוגמה:

תהיינה A,B,C קבוצות ותהי $f:A\to B$ ו- $g:B\to C$

אז ייתכן ש- $g\circ f$ חח"ע אבל f לא חח"ע

ייתכן ש- $g\circ f$ על אבל g לא על

הוכחה:

אז $g\circ f:A\to C$ יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש- $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$

נניח $x_1=x_2$

$g(f(x_1))=g(f(x_2))\leftarrow f(x_1)=f(x_2)\leftarrow x_1=x_2$

כי יהי $c\in C$ נניח $a\in A$ כך ש- $g\circ f(a)=c$

נניח $a\in A$ כך ש $g(f(a))=c$

כיוון ש- g על קיים $b\in B$ כך ש $g(b)=c$ (קיים כי c איבר)

רוצים למצוא a כך ש- $f(a)=b$ ואז הנחנו

כיוון ש- f על קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=b$.

ולסיכום $g\circ f(a)=g(f(a))=g(b)=c$

מסקנה:

אם g,f חח"ע אז גם $g\circ f$ חח"ע ואם הוא מוגדר.

משפט:

א. אם $g\circ f$ חח"ע אז f חח"ע

ב. אם $g\circ f$ על אז g על

הוכחה:

יהי $g:A\to B$ $f:B\to C$

$c\in C$ יהי $b\in B$ כך ש- $f(b)=c$

נשים $g\circ f$ על

$a\in A$ קיים $c\in C$ עבור $g(a)=b$ ומ"מ $f(g(a))=c$ כך ש- $g\circ f(a)=c$

מ.ש.ל.

יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש- $g(x_1)=g(x_2)$ נ"ש $x_1=x_2$

נשים $g(x_1)=g(x_2)$ בפונ' f על שני האגפים

$f(g(x_1))=f(g(x_2))\leftarrow$ $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$

$g\circ f$ חח"ע לכן $x_1=x_2$.

הגדרה:

יהי A נגדיר את הפונקציה הבאה $I_A:A\to A$

$I_A(a):=a$ (לא עושה כלום)

מסקנה:

$f:A\to B$ $f\circ I_A=f$ $I_B\circ f=f$

כעת נבדוק על פונקציה הפוכית

מה ההופכי של $\frac{1}{x}$?

נבדוק: $g_1=x$ $g_2=x^2$ $g_3=\frac{1}{x}$

① $f\circ g_1(x)=f(g(x))=f(x)$

② $f\circ g_2(x)=f(g(x))=f(x^2)$

③ $f\circ g_3(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{x})$ ✓

Scanned by CamScanner

פונקציות

תהי $f: A \to B$

אזי f נקראת הפיכה אם קיימות

$g = B \to A \quad h: B \to A$

כך ש: $f \circ g = I_A \qquad h \circ f = I_B$

שאלה:

מתקיים כי $g = h$ ושניהם שווים ל- f^{-1} והיא נקראת ההופכית של f

משפט:

תהי $f: A \to B$ אזי f הפיכה $\leftrightarrow$ f חח"ע ועל.

הוכחה:

$\leftarrow$ נניח f הפיכה לכן קיימת f^{-1} כך ש-

$I_B = f \circ f^{-1} \qquad I_A = f^{-1} \circ f$

צ"ל:

f חח"ע ועל

f חח"ע אזי g חח"ע אם $g \circ f$ חח"ע אזי f חח"ע

$I = f^{-1} \circ f$ לכן f על

$I = f \circ f^{-1}$ לכן f חח"ע

$\rightarrow$ נגדיר ש- f היא יחס $f = \{(a,b) \mid f(a)=b\} \subseteq A \times B$

צ"ל: $f^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in f\} \subseteq B \times A$

נראה ש- f^{-1} סדן מ- B על A ל- $f \circ f^{-1} = I_B$

ל- $f^{-1} \circ f = I_A$

נראה ש f^{-1} חח"ע ועל.

חח"ע:

יהי $b \in B$ ל- $\exists a_1, a_2 \in A$ כך ש- $(b,a_1)(b,a_2) \in f^{-1}$

$a_1 = a_2$ צ"ל

מהגדרת f^{-1} $\exists (a_1,b), (a_2,b) \in f$ כך שמתקיים ש-

$f(a_1) = f(a_2) = b$ מכך ש f חח"ע נובע ש $a_1 = a_2$.

על:

Scanned by CamScanner

(הערה: קל לבדוק סופיות, כן.)

אז $f: A \to B$ חח"ע הוא לא ההכרח נפל לבדוק.

דוגמה:

אז A סופית אז כן

אז A אינסופית לא ההכרח.

תשובה:

הוא f הפיכה ההכרח? כן שקיימת g עבורה $g \circ f = I_A$

אז $f: A \to A$ כך ש

שיטה:

שיטה חח"ע

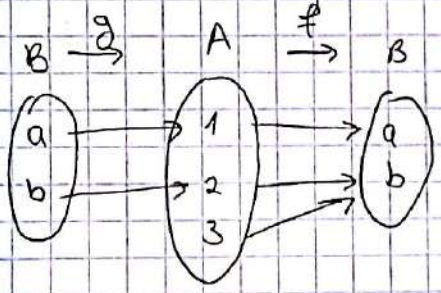
לקח f איזה הפכה כ

$g \circ f = I_B$

דוגמה:

הוא f הפיכה ההכרח? לא.

אז $f: A \to B$ כך ש- $f \circ g = I_B$ קיימת g עבורה



תשובה:

אם $f: A \to A$ חח"ע אז כן

אז A אינסופית לא ההכרח.

דוגמה:

הוא f הפיכה ההכרח? כן

אז $f: A \to A$ כך ש

$f \circ f^{-1} = I_A$

שיטה:

$f: A \to B$ $\quad f^{-1}: B \to A$ $\quad f \circ f^{-1}: B \to B$

לכל $b \in B$ $\quad f \circ f^{-1} = I_B$

$I_B(b) = b$ $\quad f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b) = I_B(b)$

נסמן $a = f^{-1}(b)$ $\quad \leftarrow \quad (b,a) \in f^{-1}$ $\quad \leftarrow \quad (a,b) \in f$

$b = f(a)$ מ.ש.ל.

מכאן צ"ל $f \circ f^{-1} = I_A$.

שיטה:

אז $f: A \to B$ כך ש- $g \circ f = I_B$ קיימת g עבורה

הוא f הפיכה ההכרח? לכל.

דוגמה:

$f \circ g = I_B$

לקח f איזה הפכה כ

שיטה חח"ע

שיטה:

אז $A \to A$ כך ש g עבורה $g \circ f = I_A$

הוא f הפיכה ההכרח?

תשובה:

אם A סופית אז כן

אם A אינסופית לא ההכרח.

דוגמה:

אז $A \to A$ חח"ע הוא לא ההכרח נפל לבדוק.

(הערה: קל לבדוק סופיות, כן.)

תרגיל:

שיטה:

יש שיטה B כך $\forall a \in A$ קיים b כך $(b,a) \in f^{-1}$

שזה לא שיטה B כך $\forall a \in A$ קיים b כך $f(a) = b$

נניח יש f על.

$f: A \to B$ $\quad f^{-1}: B \to A$ $\quad f \circ f^{-1}: B \to B$

לכל $b \in B$ $\quad f \circ f^{-1} = I_B$

ההיפך שמתקיים והוא שווה. נניח למרות $b \in B$

$I_B(b) = b$ $\quad (f \circ f^{-1})(b) = I_B(b)$

$f(a) = (f \circ (f^{-1}))(b)$

נסמן $a = f^{-1}(b)$ $\quad \leftarrow \quad (b,a) \in f^{-1}$ $\quad \leftarrow \quad (a,b) \in f$

$b = f(a)$ מ.ש.ל.

מכאן צ"ל $f \circ f^{-1} = I_A$.

שיטה:

אז $B \to A$ כך ש- $f \circ g = I_B$ קיימת g עבורה

הוא f הפיכה ההכרח? לכל.

דוגמה:

$f \circ g = I_B$

לקח f איזה הפכה כ

שיטה חח"ע

שיטה:

אז $A \to A$ כך ש g עבורה $g \circ f = I_A$

הוא f הפיכה ההכרח?

תשובה:

אם A סופית אז כן

אם A אינסופית לא ההכרח.

דוגמה:

אז $A \to A$ חח"ע הוא לא ההכרח נפל לבדוק.

(הערה: קל לבדוק סופיות, כן.)

Scanned by CamScanner

הוכחה:

נתון $g \circ f = I_A$ כך ש- g אינה חח"ע ו- f אינה על.

(לדוגמה g יכולה להיות הפונקציה f אינה הפונקציה).

$f: A \to A$ $\quad$ $g: A \to A$

$f(n) = 2n$

f חח"ע אבל לא על (כל מספר אי זוגי).

g אינה חח"ע אבל על

$$g(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \\ 1 & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$$

לכן $g \circ f(n) = n$ $\quad$ $g \circ f: A \to A$

$$g \circ f = I_A$$

הערה:

יהי A סופי. אזי $f: A \to A$

חח"ע $\iff$ על.

כלומר שבהעתקות מקרים סופיים הדרישות שקולות.

אזי f על $\iff$ g חח"ע $\quad$ $g: A \to A$ $\quad$ $f \circ g = I_A$

לכן f חח"ע $\iff$ g על כי A סופי

לכן שניהם הפיכים

Scanned by CamScanner

צמצום והרחבה של פונקציות

יהי $f: X \to Y$ ויהי $A \subseteq X$

נסמן ב- f ימין ונקבל את הפונקציה של f ל- A ש"ל

$$f|_A = f \cap A \times Y$$

f נקראת ההרחבה של $f|_A$

הערה:

קל לראות שהצמצום הינו פונקציה.

דוגמא:

$$f = \{(1,a), (2,a), (3,b)\} \quad f: \{1,2,3\} \to \{a,b\}$$

נסמן $A = \{1,3\}$

$$f|_A = \{(1,a), (3,b)\} \qquad f|_\emptyset = \emptyset$$

דוגמא:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$$

חח"ע $\qquad f|_{(0,\infty)}: [0,\infty) \to \mathbb{R}$

משפט:

יהי $f: A \to B$ אם קיים $C \subseteq A$ כך ש- $f|_C$ חח"ע ומתקיים $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f|_C)$

הוכחה:

אנו רוצים להראות כי אם $b \in \mathrm{Im}(f)$ מתקיים $\left|f^{-1}[\{b\}]\right| = 1$

כי $b \in \mathrm{Im}(f)$ לכן המתקיים עבור כל b הנ"ל

כעת אקסיומת ההחלפה, קיימת פונקציה יחידה g

$$g: \{f^{-1}[\{b\}]\}_{b \in \mathrm{Im}(f)} \to A$$

g מוגדרת אם קבוצת המקורות מקור יחיד.

נגדיר $C = \mathrm{Im}(g)$ ונטען g הוא מקיים את מה שרצינו לומר:

1. $f|_C$ חח"ע
2. $\mathrm{Im}(f|_C) = \mathrm{Im}(f)$

Scanned by CamScanner

תרגיל הוכחה:

1. נניח $a_1, a_2 \in C$ $a_1 \neq a_2$

נכיח $f|_C(a_1) \neq f|_C(a_2)$.

$a_1 \in C$ ונקח $b_1 \in B$ כך ש- $a_1 \in f^{-1}[\{b_1\}]$

כמו כן קיים b_2 כך ש $a_2 \in f^{-1}[\{b_2\}]$

$b_1 \neq b_2$ ו- f חח"ע מכאן יתכן לפי שהרי

$f(a_1) = b_1$ $f(a_2) = b_2$ לכן

$f|_C(a_1) = b_1 \neq b_2 = f|_C(a_2)$

ב. נניח כי $Im(f) = Im(f|_C)$

מהרי ש- $Im(f|_C) \subseteq Im(f)$

צ"ל $Im(f|_C) \supseteq Im(f)$

יהי $b \in Im(f)$

f היא פונקציה מהירה מכאן לפי קיים

$a_1 \in C$ כך ש- $f(a_1) = b$ $f|_C(a_1) = b$

לכן $b \in Im(f|_C)$.

Scanned by CamScanner

עצמות

מטרה הבאה:

להשוות בין סדרי גודל של קבוצות אינסופיות.

דוגמאות:

השלמן של הילברט

ספרייה יש שלום עם אינסוף חדרים 1,2,

בכל קומה, חדר אחד.

השלמן תפוס באופן מלא.

מגיע אורח חדש ורוצה לקבל חדר. אין מקום.

מבקשים מכל אורח לעבור קומה ונהיה מקום.

הדר 1 מתפנה שבו היה אורח קודם עם 1,2,3...

כל אורח עליה לקומה ב' 2 שבהתה ואם

רק אורח חדש 1 נכנס נשים לקומה 1-מצב.

הגדרה:

נגיד קבוצות A,B שוות כי A,B שקולות עוצמה ומסמנים

$|B| = |A|$ או $B \sim A$ אם קיימת פונ $f: A \to B$

חח"ע ועל.

אם יש קבוצה ש הקבוצות כזה היה נקרא יותר, שכל נסות

שבעיני כוחם שקולות מתקיימת.

עוצמה היא כדיבה יהיו מחלקי שקולות

נשמע נאמר שכל הקבוצות ששקולות עוצמה ל-1 הן "עוצמה" $\aleph_0$

"קטן מסביר"

$|B| \leq |A|$ אם $f: A \to B$ חח"ע

"סומכאות"

יהי קבוצה A כך $|A| = |A|$ $I_A: A \to A$ חח"ע ועל

יהיו A,B קבוצות כך ש $|B| \sim |A|$ אז $|A| \sim |B|$

קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל אם f הפיכה ומתקיים $f^{-1}: B \to A$

Scanned by CamScanner

"טרנזיטיביות"

תהיינה A,B,C כך ש- $A\sim B$, $B\sim C$ אז $A\sim C$

קיימות $f:A\to B$ חח"ע ועל, $g:B\to C$ חח"ע ועל

אזי $g\circ f:A\to C$ חח"ע ועל

דוגמאות:

$A\subset\mathbb{N}$ אינסופית, אזי $A\sim\mathbb{N}$

$f:A\to\mathbb{N}$ נגדיר $f(n)=\frac{n}{2}$ * ונוכיח כי הפונקציה

מוגדרת היטב. אכן $\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$ כי n זוגי

מוגדרת היטב: נתאר עכ"ל איך ששיך ל-A מתאים אליבר

יחיד ששיך ל-B

נוכיח כי f חח"ע ועל

חח"ע:

יהיו $n_1,n_2\in A$ כך ש- $f(n_1)=f(n_2)$ אז $n_1=n_2$

לכן $\frac{n_1}{2}=\frac{n_2}{2}$ $\Leftarrow$ $n_1=n_2$ מ.ש.ל ■

על:

יהי $n\in\mathbb{N}$ אז קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=n$

אכן נבחר $a=2n$ $\left(\frac{a}{2}=n\right)$

ואכן $f(a)=n$ מ.ש.ל. ■

מהי סדרה?

סדרה היא פונקציה ממ"ש לקבוצה כלשהי $a_n=a(n)$

מסקנה:

A שקולה לתת-קבוצה של $\mathbb{N}$ אסמ"ש אפשר להציב סדרה שמטילה

על A כלומר בדיוק פעם אחת.

כלומר אם $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע ועל

דרך אחר:

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12

אז בדיוק הפונקציה $f(n)=2n$

Scanned by CamScanner

הדגרה:

אם A קבוצה סופית ש- $\mathbb{N}$ שקולה ל- A ($A \sim \mathbb{N}$) נסמן $|A| = \aleph_0$

האם $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$?

$$f(n): \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & n \text{ אי זוגי} \\ \frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5	6
f(n)	0	1	-1	2	-2	3

מדוע שלון אין בעיה להמשיך כי ידוע n זוגי ואם אי זוגי.

ברור שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $f(n) \in \mathbb{Z}$

נוכיח ש- f חח"ע ועל $(f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z})$

חח"ע:

יהיו $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$: כך ש- $f(n_1) = f(n_2)$ אז $n_1 = n_2$

① אחד מהם זוגי ו n_2 אי זוגי (או להפך)

$$f(n_1) = \frac{n_1}{2} > 0 \qquad f(n_2) = -\frac{n_2-1}{2} \leq 0$$

סתירה לכך ש- $f(n_1) = f(n_2)$

② אם n_1, n_2 זוגיים $f(n_1) = f(n_2) \leftarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \leftarrow n_1 = n_2$

③ אם n_1, n_2 אי זוגיים $-\frac{n_1-1}{2} = -\frac{n_2-1}{2} \leftarrow n_1 = n_2$ מש"ל

על:

יהי $k \in \mathbb{Z}$ צ"ל $\exists n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) = k$

אם $k > 0$ נחפש n זוגי כך ש $f(n) = k \leftarrow \frac{n}{2} = k$

נמתח $n = 2k$ הרי שהוא זוגי.

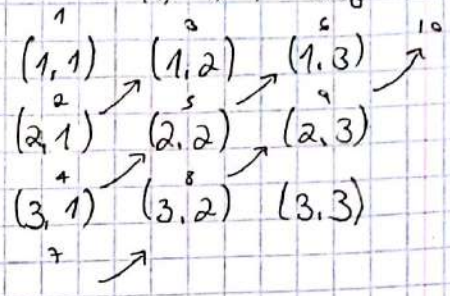
אם $k \leq 0$ נחפש n אי זוגי $-\frac{n-1}{2} = k \leftarrow n = -2k+1$

יצוא אכן שי"ך ל- $\mathbb{N}$ מפני ש- $k \leq 0$ $1 - 2k \geq 1$

אכן $n = -2k+1$ אי זוגי $f(-2k+1) = k$ מ.ש.ל

$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$

(1,1) (2,1) (1,2) (3,1) (2,2) (1,3) ...



נתונה $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

מהו המספר (a,b) שעליו אלכסון הוא $a+b-1$?

מה מיקומו באלכסון ? b

סכום באלכסונים הוא עדיין $f(a,b) = b +$

$= 1+2+\dots+(a+b-2)+b =$

$(1+2+\dots+n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$f(a,b) = \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{2} + b$

תרגיל: הוכיחו ש f חח"ע ועל.

מכאן שיש לנו הוכחה ש $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}$ (k פעמים)

$\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$A\sim B$ וגם $C\sim D$ אזי $A\times C \sim B\times D$

$(a,b)\to\frac{a}{b}$ $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \neq \mathbb{Q}$

$(a,0)$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$

$(2,4)=(1,2)$ $\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$

הוכיחו $|\mathbb{R}| = \aleph_0$? שקול

נניח שיש מספרים ממשיים בקטע $(0,1)$ עשרוניים

כלומר, שצורה קנונית כזאת הייצוגים נגמרים ב- ∞ 9

נגדיר פונקציה $A\subseteq\mathbb{R}$ המכילה את כל המספרים שאין 9

בצורה "נחש שלום".

ניקח מעתק A $B\subseteq A$ מן 0 ל- 1

ב- B כבר אין יותר.

Scanned by CamScanner

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $A \sim B$ כלומר קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל

נגדיר g חח"ע ועל שכיוון מס' המשתנים הבאים:

המספר במקום ה-i אחרי הנקודה שווה ל-i אם המספר

במקום ה-i של $f(i)$ שונה מ-1 ו-2 אחרת (אם שווה 1)

נקרא לו a

$a \in B$ כיוון שיש בו רק 1 ו-2 ולכן יש לו ייצוג עשרוני

יחיד שאינו 9.

לכל a אין מקור תחת f. נגדיר פונקציה g קיימת משום כך g

$a = f(n)$ המספר במקום ה-n של $f(n)$ $= 1$ אז לקח 1

המספר במקום ה-n של $a = 2$ אז 1 בהתאמה

לכן ל-a לפי $f(n)$ מספר שונה במקום ה-n לכן

מצוטט בניגוד לשוויון שניים הפונקציה לכך $g = a \neq f(n)$

לכן $|A| \neq |\mathbb{R}|$ אחרת קיימת $f: A \to \mathbb{R}$ על

אבל אין אפילו $f: A \to \mathbb{N}$ על

כלומר במידה ואי השוויון כאן מתמשך ...

כלומר $|A| = |\mathbb{R}|$.

האם $|\mathbb{C}| \sim |\mathbb{R}|$?

$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \sim |\mathbb{C}|$ $\quad f(a,b) = (a+bi)$

האם $|\mathbb{R}| \sim |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$ ובכלל $|A| \sim |A \times A|$?

נניח ש- $|B| \sim |B \times B|$

$f(0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots) = (0.a_1 a_3 \dots, 0.a_2 a_4 \dots)$ לכל f חח"ע ועל

נקבל $|B| \sim |B \times B|$ ומצד המשך ש- $|\mathbb{R}| \sim |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$

אחרי שעשינו ש- $|\mathbb{R}| \sim |B|$

Scanned by CamScanner

תזכורת:

נתונים הקטעים $[a,b]$ $[c,d]$ (קצוותיהם ב-$\mathbb{R}$)

כאשר $a<b$ ו- $c<d$.

נגדיר פונקציה $f:[a,b]\to[c,d]$ חח"ע ועל

$$f(x)=\frac{d-c}{b-a}x+\frac{ad-bc}{a-b}$$

$$f(a)=a\frac{d-c}{b-a}+\frac{bc-ad}{b-a}=$$

$$=\frac{ad-ac+bc-ad}{b-a}=\frac{c(b-a)}{b-a}=c$$

$\exists x\in[a,b]$ כך ש- $f(x)\in[c,d]$ (משפט הערך הביניים)

$\forall e$ חח"ע ועל f

תרגיל: $(0,1)\sim(0,1]$

$f:(0,1)\to(0,1]$

כאשר:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n-1} & \leftarrow x=\frac{1}{n}\\ x & \leftarrow x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$$

משפט הערך הביניים: תחום ✓ כי $0<x<1$ לכן.

① $x=\frac{1}{n}$ $f(x)=\frac{1}{n-1}\le 1$

② $x\neq\frac{1}{n}$ $f(x)=x\neq 0$

נוכיח ש- f חח"ע ועל:

חח"ע:

יהי $x_1,x_2\in(0,1)$ כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל $x_1=x_2$

x_1 ① ② מהצורה $\frac{1}{n}$ ו- x_2 (ההפוך מ-x_1).

$f(x_1)=\frac{1}{n-1}$ $f(x_2)=x_2$ $x_2\neq\frac{1}{n-1}$ סתירה.

③ x_1,x_2 מהצורה $\frac{1}{n}$ $f(x_1)=\frac{1}{n-1}$ $f(x_2)=\frac{1}{k-1}\to k=n\to x_1=x_2$

④ $x_1,x_2\neq\frac{1}{n}$ $f(x_1)=x_1$ $f(x_2)=x_2$ $x_1=x_2$

על:

יהי $b\in(0,1]$ צ"ל $a\in(0,1)$ כך ש- $f(a)=b$

אם $b=\frac{1}{n}$ אז $a=\frac{1}{n+1}\in(0,1)$

אם $b\neq\frac{1}{n}$ אז $a=b$ ו- $b\neq\frac{1}{1}$ כמובן $\frac{1}{n}\neq b$ ולכן

Scanned by CamScanner

תרגיל:

הוכיחו ש- A, B שקולות עוצמה אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

B מתאים כך ש- $B \subseteq (0,1)$ אך $B \sim B \times B$

הגדרה:

נאמר ש- A, B אומרים ש- $|A| \leq |B|$ אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע

(במידה שאם כבר עבור הקבוצה סופית).

משפט:

תהיינה A, B כך ש- $A \subseteq B$ אזי $|A| \leq |B|$

הוכחה:

$f: A \to B$ שמתקיים $f(a) = a$

אזי $a \in A$ $\Rightarrow$ $f(a) = a \in B$ מתוך ש- f חח"ע מ.ש.ל.

שאלה:

נניח $|A| \leq |B|$ כלומר קיימת $f: A \to B$ חח"ע

האם בהכרח קיימת $g: B \to A$ על?

כדאי לנסות למצוא $g: B \to A$ על כאלו $|B| \geq |A|$

תשובה:

לכל $f: \emptyset \to B$ $B \neq \emptyset$ f חח"ע

$g: B \to \emptyset$ לכל קיימת. השאלה הטובה שנשאל עכשיו, כי אין לה

אפילו מועמדות. ($|B| \leq |\emptyset|$ אבל)

אולם, $A, B \neq \emptyset$ (על ריקות) התשובה היא כן.

נשאר עוד כי g על אומר ש- b שמקורו שלו, אולם יש לנו

את האחרים נשאר שאינהו $A \neq \emptyset$ כלומר קיים $a \in A$

הטענה שאם $A, B \neq \emptyset$ ו- $|A| \leq |B|$ אז קיימת $g: B \to A$ על.

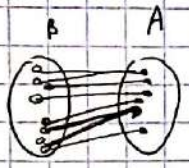
Scanned by CamScanner

שאלה:

יהיו A,B קבוצות. האם $|A| \leq |B|$ אם ורק אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע?

תשובה:

כן. נוכיח את הטענה בשתי דרכים.



נניח $f: A \to B$ חח"ע. נגדיר $g: B \to A$ על ידי:

לכל $b \in B$ נגדיר $g(b) = a$ כאשר a הוא האיבר היחיד ב-A עבורו $f(a) = b$ (אם קיים כזה).

נוכיח כי g על (כלומר $\forall a \in A \; \exists b \in B \; g(b) = a$):

יהי $a \in A$. אז $f(a) \in B$ ומתקיים $g(f(a)) = a$ לפי הגדרת g.

נוכיח כי g חח"ע:

יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש-$g(b_1) = g(b_2)$. אז $f(a_1) = f(a_2)$ ומכיוון ש-f חח"ע נקבל $a_1 = a_2$.

הוכחה:

כי $|B| \geq |A|$ "בפלקסיבי".

יהי A קבוצה כלשהי. $A \subseteq A$ ו-$|A| \leq |A|$.

"טרנזיטיביות":

יהיו A,B,C כך ש- $|A| \leq |B|$ ו-$|B| \leq |C|$ אז $|A| \leq |C|$

כלומר $f: A \to B$ חח"ע ו-$g: B \to C$ חח"ע

$g \circ f: A \to C$ חח"ע

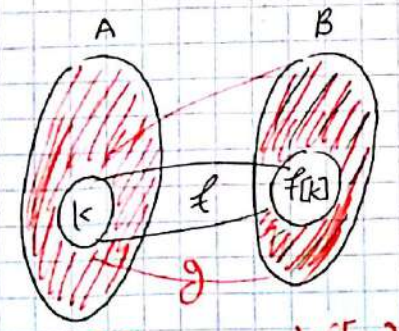
"אנטי סימטריות":

יהיו A,B כך ש- $|A| \leq |B|$ ו-$|B| \leq |A|$ אם ורק אם $|A| = |B|$

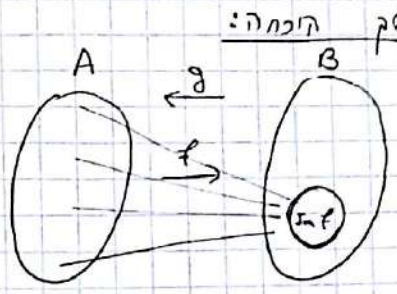
כלומר אם $f: A \to B$ חח"ע ו-$g: B \to A$ חח"ע

אז $h: A \to B$ חח"ע ועל

Scanned by CamScanner



רוצים לעשות



המשך הוכחה:

$g[B \setminus f[k]] = A \setminus (k)$:צ"ל

$k = A \setminus g[B \setminus f[k]]$ כלומר

הסדרה:

יהי קבוצה A ופונקציה $\Psi : P(A) \to P(A)$

שומרים ש- Ψ שומרת את סדר ההכלה אם לכל $X \subseteq Y$

$\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$

דוגמא:

$A = \{1,2,3\}$

$\Psi(\emptyset) = \{1\}$ כשדיר

$\Psi(\{1\}) = \{1,2\}$

$\Psi(\{2\}) = \{1\}$

$\Psi(\{3\}) = \{1\}$

$\Psi(\{1,2\}) = \{1,2\}$

$\Psi(\{1,3\}) = \{1,2\}$

$\Psi(\{2,3\}) = \{1\}$

$\Psi(\{1,2,3\}) = \{1,2\}$

$U = \{X \subseteq A \mid X \subseteq \Psi(X)\}$ נסמן ב-

$U = \{(\emptyset), \{1\}, \{1,2\}\}$

$\cup U = \{1,2\}$ $\Psi\{1,2\} = \{1,2\}$

$\Psi(X) = A \setminus g\{B \setminus f(X)\}$ נקבע

ונטען שהוא שומר על סדר. נקבע $k = \cup U$

ונבדוק $k = \Psi(k)$

Scanned by CamScanner

טענה 1:

תהי קבוצה A ותהי $\Psi: \rho(A) \to \rho(A)$

שומרת מהי פונקציה עבור $X, Y \subseteq A$ אם

$X \subseteq Y$ אז $\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$

אזי לכל $A \supseteq X$ קיים $A \supseteq Y$ כך ש $\Psi(Y) = X$ שקיים

הוכחה:

נסמן $U := \{X \subseteq A \mid \Psi(X) \subseteq X\}$

נסמן $\bigcup U = \bigcup_{X \in U} X = Y$ $\Psi(X) \subseteq X$

נוכיח $\Psi(Y) = Y$

יהי $a \in Y$ ונ"ל $a \in \Psi(Y)$

$a \in Y$ אם קיים X כך ש $\Psi(X) \subseteq X$ וגם $a \in X$

לכן $a \in \Psi(X)$.

מכיוון ש $X \subseteq Y$ אז $\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$ ולכן $a \in \Psi(Y)$

כלומר $Y \supseteq \Psi(Y)$

יהי $a \in \Psi(Y)$ אז $\exists U \in \Psi(Y)$ כך ש $a \in U$ ומכיוון ש $U \subseteq \Psi(Y)$

ולכן $Y \supseteq \Psi(Y)$ והרי Y הוא איחוד של כל הקבוצות ב U

טענה 2:

תהיינה $f: A \to B$ ו $g: B \to A$ פונקציות

ונגדיר $\Psi: \rho(A) \to \rho(A)$ עבור $X \subseteq A$ שומרת מהי.

$\Psi(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]]$

הוכחה:

תהיינה $A \supseteq Y \supseteq X$ כך ש $\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$

$f[Y] \supseteq f[X]$ $\Rightarrow$ $B \setminus f[Y] \subseteq B \setminus f[X]$

$g[B \setminus f[Y]] \subseteq g[B \setminus f[X]]$

ולכן $A \setminus g[B \setminus f[X]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[Y]]$

$\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$

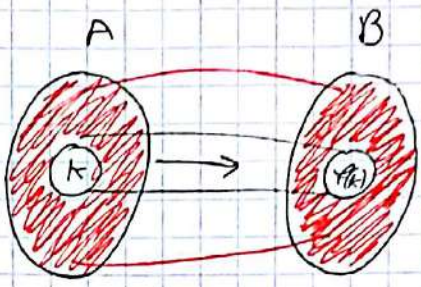
מסקנה:

יהי A קבוצה ו B קבוצה

קיימת $A \subseteq A$ כך ש- $g[B \setminus f[A]] = A \setminus A$

כשלים את B הפונקציה g - A ונקבע ש-

$$g[B \setminus f[A]] = A \setminus A$$



$$A \setminus A \leftarrow B \setminus f[A]$$

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

תהיינה A, B כך ש- $|A| \leq |B|$ ו $|B| \leq |A|$

אזי $|A| = |B|$

הוכחה:

נתון קיימת $f: A \to B$ חח"ע ו $g: B \to A$ חח"ע

נבנה $h: A \to B$ חח"ע ועל.

לפי המסקנה שמעל קיימת $A \subseteq A$

$$g[B \setminus f[A]] = A \setminus A$$

לכל $x \in A$

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g^{-1}|_{B \setminus f[A]}(x) & x \in A \setminus A \end{cases}$$

הרי $g|_{B \setminus f[A]} : B \setminus f[A] \to A \setminus A$ הוא חח"ע ועל לפי הנתון.

חח"ע:

① יהי $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $h(x_1) = h(x_2)$ צ"ל $x_1 = x_2$

$x_1 \in A$, $x_2 \in A \setminus A$ (או להפך) (...)

$h(x_1) = f(x_1) \in f[A] \subseteq B \setminus g^{-1}|_{B \setminus f[A]}(x_2) = g(x_2)$

מהגדרה קיבלנו ש- $h(x_1) = h(x_2)$

לפי הוכחה כמו שעשינו!

$h(x_1)=h(x_2)$ כך ש- $x_1,x_2\in A$ יהי

$x_1=x_2$ לכן $f(x_1)=f(x_2)$ ← f חח"ע

$h(x_1)=h(x_2)$ כך ש- $x_1,x_2\in A$ יהי

$g^{-1}|_{g[A]\to A}(x_1)=g^{-1}|_{g[A]\to A}(x_2)$ ההופכית חח"ע לכן $x_1=x_2$

נניח כי h על:

יהי $b\in B$ כך ש- $h(a)=b$ $a\in A$

אזי $b\in f[K]$ אחרת קיים $a\in K$ כך ש- $f(a)=b$

$h(a)=f(a)=b$

אזי $b\in B\setminus f[K]$ נסמן $a=g(b)$

$h(a)=g^{-1}|_{g[A]\to A}(g(b))=b$

דוגמאות:

$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{N}$ ← $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$

נגדיר $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ ע"י $f(x)=(a,b)$

כאשר $x=\frac{a}{b}$ שבר מצומצם שקול x

שימו ❤:

אם נראה כעת פונקציות שבהן מצומצם מיוצג בדרכים שונות לפי הגדרה שאנחנו נראה. $f(0.5)=(1,2),(2,4),(-1,-2)$

מכיוון ש- f חח"ע כי נראה שאין מס' שונים אחד שבהן מצומצם. האם f על?

לכן $(2,4)$ אין מקור כי לא נראה שבהן מצומצם.

$|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{Z}|\le|\mathbb{Q}|$

$|\mathbb{Q}|\le|\mathbb{N}|$ $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{Q}|$

↘ ↙

ק.ש.ל

$|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

Scanned by CamScanner

משפט קנטור

יהי A קבוצה אזי $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

כלומר $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ ו־ $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

מסקנה:

יש מספר עוצמתי שלא קיים לו עוקב

הוכחת המשפט:

ראשית נטען ש- $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$

נגדיר $f: A \to \mathcal{P}(A)$ חח"ע

$a \in A$ לכל $f(a) = \{a\}$ חח"ע ש f

כיצד נראה ש- $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

נניח בשלילה ש- $|A| = |\mathcal{P}(A)|$ ולכן קיים $g: A \to \mathcal{P}(A)$

חח"ע ועל (חח"ע יש נסביר מלמ)

נגדיר הקבוצה $D := \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$

ברור ש- $D \subseteq A$ לכן מכך ש- g על קיים $d \in A$

כך ש- $g(d) = D$ $(D \in \mathcal{P}(A))$

- אם $d \in D$ אז $D = g(d)$ ולכן $d \notin g(d)$ סתירה!
- אם $d \notin D$ אז $d \in g(d)$ ולכן $d \in D$ סתירה!

הגדרה:

קבוצה A נקראת בת מניה אם A סופית או $|A| = \aleph_0$

טענה:

לכל קבוצה A אינסופית מתקיים $\aleph_0 \leq |A|$

הסבר:

מהנחת האקסיומת הבחירה.

הסבר:

יהי $f: \mathbb{N} \to A$ חח"ע $A \neq \emptyset$ לכן קיים $a_1 \in A$

- $a_1 := f(1)$ $\emptyset \neq A \setminus \{a_1\}$ (אי הריקן מכך שA אינסופית) אקסיומת הבחירה נותנת לנו פונקציה f כך ש- $a_2 := f(a_1)$ ונגדיר $a_1 \neq a_2 \in A$ לכן קיים ... (כאשר מתמטית)

על אקסיומת הבחירה, יש קבוצות A,B שלא ניתן להשוות ביניהן.

Scanned by CamScanner

הוא ק"מ A כך ש- $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$

משימה:

אז שקו אז טלטו. (השערה הרצף)

מסקנה:

ט יש קבוצה שיש מעצמה הוא מה שיש.

הוכחה:

יהי A בעל עוצמה, ויהי $A \supseteq B$

אם B סופי סיימנו.

אם B אינסופי כיוון ש A אינסופי לכן $|A| = \aleph_0$

$\aleph_0 = |A| \leq |B| \leq \aleph_0$ ← ק.ש.ב

$|B| = \aleph_0$

משפט:

(בהנחת האקסיומה הבחירה)

איחוד כן מניות של קבוצות בנות מניה הלו בן מניה

בהנתן $\aleph_0 \leq |I|$ ובהנתן אוסף $\{A_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $i \in I$

$\aleph_0 \leq |A|$ אזי

$$\aleph_0 \leq \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|$$

הוכחה:

$\aleph_0 \leq |I|$ לפי ק"ש $f: \mathbb{N} \to I$ חח"ע

לכל $i \in I$ בפרט פונקציה $g_i : A_i \to \mathbb{N}$ חח"ע (בגלל האקסיומה הבחירה)

נגדיר פונקציה $h : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שגם היא חח"ע

לכל $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ בפרט i לפי $f(i)$ מינימלי שעבורו $a \in A_i$

$$h(a) = \left(f(i), g_i(a)\right)$$

הוכחה:

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$ $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots\}$

נשכיח ש- h חח"ע.

■

Scanned by CamScanner

המשך הוכחה:

יהיו $a_1, a_2 \in \bigcup_{i\in I} A_i$ כך ש- $h(a_1)=h(a_2)$ צ"ל $a_1=a_2$

כאשר i הוא כזה ש $h(a_1)=(f(i), g_i(a_1))$ משמע, $a_1 \in A_i$ ו- $f(i)$ מוגדרת היטב כי h חח"ע

כאשר i הנ"ל עבור $a_2 \in A_i$ ו- $f(i)$ מוגדרת היטב כי h חח"ע

$$h(a_2) = (f(i), g_i(a_2))$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{כיון ש } h(a_1)=h(a_2) \text{ וכיון ש- } h \text{ חח"ע אזי מתקיים} \\ \text{שמתקיים גם ש } (f(i)=f(j) \to i=j) \end{array} \right)$$

לכן $a_1, a_2 \in A_i$ ו $g_i(a_1)=g_i(a_2)$

אך g_i חח"ע ולכן $a_1=a_2$

דוגמאות:

מהי עוצמת כל התלים האפשריים בקבוצה? (עד כדי איזומורפיזם)

קבוצה יש בה טיפוס אחד בלבד או אינסוף

באורך 1 $A_1 = 2^2$

באורך 2 $A_2 = 2^2$

$I = \mathbb{N}$ $|A_i| \leq |\mathbb{N}|$ $|\bigcup A_i| \leq \aleph_0$

הקבוצה לעיל נתן גם לכתוב מלים אינסופיות (סדרות).

Scanned by CamScanner

תזכורת

נזכרנו על קבוצה B שעוצמה אין על הסט הראשון בין 0 ל-1 שאין לו מאין סדרה עשויה שלה. הוכחנו $|B| \neq \aleph_0$.

נשוה בפעולה $|R| = \aleph$ ו $B \subseteq R$ אזי $|B| \leq |R|$

ולכן $|B| \geq \aleph_0$

אזי קיים $f: B \to \mathbb{N}$ על שמעידה שהוכחנו.

הטענה II:

B אינסופי ולכן $|B| \geq \aleph_0$ לפי: ק.ש.ב $|B| = \aleph_0$ סיימנו!

סה"כ $|A| \neq |R|$ $\aleph_0 \neq \aleph$ $\aleph > \aleph_0$.

הוכחנו ש- $(a,b) \sim (c,d)$

ופה $[a,b] \sim (a,b)$ ונשים לב $(a,b) \sim [a,b]$

$|R| = |(0,1)|$

הטענה שנוכיח היום בתרגול:

$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$ ש- $f(x) = \tan(x)$

הוכחה לפי איך:

$(0,1) \sim (1,\infty)$ $f: (0,1) \to (1,\infty)$ $f(x) = \frac{1}{x}$

מוגדרה היטב:

עבור $0 < x < 1$ $\frac{1}{x} > 1$

ולכן $f(x) \in (1,\infty)$

חח"ע:

יהיו $0 < x_1, x_2 < 1$ כך ש- $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$ $\leftarrow$ $x_1 = x_2$

על:

יהי $y \in (1,\infty)$ צ"ל $x \in (0,1)$ כך ש- $\frac{1}{x} = y$

נבחר $x = \frac{1}{y}$ מתאים $\frac{1}{y} \in (0,1)$ ומתקיים $\frac{1}{\frac{1}{y}} = y$

$f: (0,1) \to (0,\infty)$ $\leftarrow$ $f(x) = \frac{1}{x} - 1$

$g: (-1,0) \to (-\infty, 0)$ $\leftarrow$ $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ חח"ע ועל.

$h(-1,1) \to \mathbb{R}$

$$h(x) \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} - 1 & x \in (-1,0) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

אריתמטיקה של עוצמות

חשבון עוצמות (חיבור, כפל, חזקה)

נזכר: $\aleph_0^{\aleph_0}$, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0$

הגדרה:

תהיינה עוצמות a, b $\left(a = |A| , \quad b = |B| \right)$

רוצים להגדיר $a+b := |A \cup B|$

אבל עדיין $2 + 2 \neq |\{1,2\} \cup \{2,3\}| = 3$

נבחר A, B כך ש- $|A| = a$ $|B| = b$

נגדיר סכום: $a + b := |A \cup B|$

בתנאי שההגדרה אינה תלויה בבחירת A, B.

כלומר בתנאי ש A, B זרים ו- C, D זרים

$|A| = |C|$ $|B| = |D|$ אזי $|A \cup B| = |C \cup D|$

יש $f: A \to C$ חח"ע ועל

$g: B \to D$ חח"ע ועל

נגדיר $h: A \cup B \to C \cup D$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

קל לוודא ש h חח"ע ועל

כאן כן הוכח מדוע הוכחה בעמוד הקודם ש A, B זרים.

הערה:

הגדרה זו מתיישרת עם תחילת הדרך בקרדינלים סופיים:

$$|\{1,2\}| + |\{1,2,3\}| = 5$$

$C = \{1,2\}$ $D = \{4,5,6\}$ $|C \cup D| = 5$

טענה חיסור עוצמות ~~$\aleph_0 - \aleph_0$~~

דוגמאות:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0$$

A = זוגיים B = אי זוגיים $A \cap B = \emptyset$

$|A| = \aleph_0$ $|B| = \aleph_0$

לכן $|A \cup B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ $\aleph_0 + \aleph_0 = |A \cup B| = \aleph_0$

דוגמא:

$\aleph = \aleph_0 + |X| = \aleph_0 + 2$

$A = \mathbb{N}$ $\quad B = (0,1)$ $\quad A \cap B = \emptyset$

$|A| = \aleph_0$ $\quad |B| = \aleph$ $\quad |\mathbb{N} \cup (0,1)| = \aleph$

כי $(0,1) \subseteq \mathbb{N} \cup (0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$\aleph \leq |C| \leq \aleph$ לפי ק.ש.ב $\quad \aleph = |C|$

דוגמא:

$\aleph + \aleph = \aleph$

$A = (0,1)$ $\quad B = [1,2)$ $\quad A \cup B = (0,2)$

הגדרה:

$a \cdot b = |A \times B|$ עוצמות כפל a, b תהיינה

כאשר $|A| = a$ $\quad |B| = b$

אם $|A| = |C|$ $\quad |B| = |D|$ אז $|A \times B| = |C \times D|$

הוכחה:

תהי $f: A \to C$ חח"ע ועל ו $g: B \to D$ חח"ע ועל

$h: A \times B \to C \times D$ $\quad h(a,b) = (f(a), g(b))$

נשאיר לקוראים שאכן חח"ע ועל.

דוגמא:

$|\{1,2\}| \cdot |\{1,2\}| = 4$

$|\{1,2\} \times \{1,2\}| =$

$= |\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}| = 4$

הערה:

שים לב שאין צורך שהקבוצות יהיו זרות.

שאלה:

האם קיים עוצמה a כך ש $a \cdot 0 = 0$?

הוכחה:

$|\emptyset \times A| = |\emptyset| = 0$

שימו ♥

$0 \cdot \infty \neq 0$

זה תלוי שעוצמות כי אין הגדרה לפעפ.

Scanned by CamScanner

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$

$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

$\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

$|\mathbb{N} \times (0,1]| = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$

$f(n,x) = n+x \qquad f: \mathbb{N} \times (0,1] \to (1,\infty)$

חח"ע:

יהיו $(n_1, x_1), (n_2, x_2)$ כך ש- $f(n_1,x_1) = f(n_2,x_2)$

צ"ל $(n_1, x_1) = (n_2, x_2)$ כלומר צ"ל $n_1 + x_1 = n_2 + x_2$

$$\underbrace{n_1 - n_2}_{\text{שלם}} = \underbrace{x_2 - x_1}_{\text{שלם}}$$

0 / \ שלם

$n_1 = n_2$ כלומר $x_1 = x_2$ ל.ש.ל.

על:

יהי $y \in (1,\infty)$ צ"ל קיימים n, x כך ש $f(n,x) = y$

נבנה בעזרת הפונקציה הבאה שקולטת מספר ממשי ומחזירה את השלם הקטן ממנו

$y \in \mathbb{N}$ אזי $x = 1$ $n = y - 1$

$x = y - \lfloor y \rfloor$ $n = \lfloor y \rfloor$ אחרת

$x \in (0,1]$ $n \in \mathbb{N}$ $f(n,x) = y$

$|\mathbb{N} \times (0,1]| = |(1,\infty)| = \aleph$ $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$ לכן

הגדרה:

$B^A = \{ f : A \to B \}$ הפונקציות מ A ל B

$$\left| \{1,2,3\}^{\{1,2\}} \right| = 9$$

הגדרה:

תהיינה a, b עוצמות כלשהן A, B קבוצות כך ש $a = |A|$ $b = |B|$

$a^b = |A^B|$

$|A| = |C|$ וגם $|B| = |D|$ אזי $|A^B| = |C^D|$

Scanned by CamScanner

הוכחה:

$f: A \to C$ על חח"ע

$g: B \to D$ על חח"ע

$\varphi: A^B \to C^D$ נגדיר על ו חח"ע

$\varphi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$: $h: B \to A$ לכל

$D \to C$

מוגדר היטב.

חח"ע:

יהי $h_1 h_2 \in A^B$ כך ש- $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$

$f \circ h_1 \circ g^{-1} = f \circ h_2 \circ g^{-1}$ לפיכך $h_1 = h_2$

$f^{-1} \circ f \circ h_1 \circ g^{-1} \circ g = f^{-1} \circ f \circ h_2 \circ g^{-1} \circ g$ לכן

$h_1 = h_2$ ■

על:

יהי $t: D \to C$ ו $h: B \to A$ כך ש- $\varphi(h) = t$

צריך ש- $f \circ h \circ g^{-1} = t \leftrightarrow h = f^{-1} \circ t \circ g$ מתקיים. ■

שאלה:

כאשר הבסיס $\varnothing$ - $|\varnothing^{\varnothing}| = 0^0 = 1$

$\varnothing$ ו 1 נבדלו

אם $0^a = 0$ $(a \neq 0)$

כלומר בסיס שהקבוצה המתאימה לו ריקה אבל הקבוצה המעריכה.

בדיון מילולי:

$X_0 \leq X$

כי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$

$f(x) = x$

f חח"ע ועל. לכן $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{R}|$

הוכחה:

f אינה מוגדרת היטב עבור $x \in \mathbb{R}$ כלשהו $f(x) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

לדוגמה $x = \pi \in \mathbb{R}$ אבל $\pi \notin \mathbb{Q}$. לכן היחס אינו פונקציה.

Scanned by CamScanner

תזכורת:

- סדרות של איברים מ- A הן $A^{\mathbb{N}}$ (כלומר $f: \mathbb{N} \to A$)

הוכחה:

הצגה בינארית של מספר $7 = 111 = 2^2+2^1+2^0$

באופן דומה עשרוניים $1 = 0.11111\ldots$

נגדיר: $f: [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$f(x)$ = יש הבדל של x שלו מסתיים באינסוף 1.

f אינה על כי $f(x) \neq 1.111000\ldots$

f חח"ע:

אם לב מס' יש אחד יחיד בינארי, הוא שווה.

לכן $|[0,1)| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leftarrow \aleph \leq 2^{\aleph_0}$

$|\{1,2\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$

$f: \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to B$ (B = מס' בין 0,1 כלי 9 ביחד עשרוני)

$f(x)$ = המס' ב- B שיתאים הרשרון הזה X

$f(1111\ldots) = \frac{1}{9} = 0.1111\ldots$ כאשר f חח"ע

ולכן $|B| \leq \aleph$ אזי $B \subseteq \mathbb{R}$ יודע $2^{\aleph_0} \leq |B|$

$\aleph \leq |B| \leq 2^{\aleph_0} \leq \aleph$ לפי ק.ש.ב

$|B| = \aleph$

$2^{\aleph_0} = \aleph$

משפט:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

הוכחה:

יהי $B \subseteq A$ נגדיר לפי הפונקציה האופיינית $\chi_B: A \to \{0,1\}$

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

דוגמה: $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,3\}$ $\chi_B: \{1,2,3,4\} \to \{1,0\}$

$\chi_B(1) = 1$ $\chi_B(2) = 0$ $\chi_B(3) = 1$ $\chi_B(4) = 0$

נגדיר $f: P(A) \to \{0,1\}^A$ $f(B) = \chi_B$

נראה f חח"ע ועל ולכן $|P(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|}$

Scanned by CamScanner

תרגיל בית:

תזכורת:

תהי f פונקציה $A \subseteq A$, $B_1, B_2 \subseteq A$ כך ש- $f(B_1) = f(B_2)$ אם"ם $B_1 = B_2$ אם"ם $X_{B_1} = X_{B_2}$ אם"ם $X_{B_1}(a) = X_{B_2}(a)$

נניח בשלילה ש $B_1 \neq B_2$ אזי קיים b כך ש- $b \in B_1$ ו $b \notin B_2$ או להפך.

סתירה! $X_{B_2}(b) = 0$ $X_{B_1}(b) = 1$

שאלה:

תהי $f: A \to \{0,1\}$ אז קיימת B יחידה כך ש $f(B) = f$

נגדיר $X_B = f$ אם"ם $B = \{a \in A : f(a) = 1\}$

אם $a \notin B$ אז $X_B(a) = 0$ אם"ם $f(a) = 0$

אם $a \in B$ אז $X_B(a) = 1$ אם"ם $f(a) = 1$

מסקנה: $|P(A)| = 2^{|A|}$ $|P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph$

תרגיל:

אם $|A| \leq |C|$ $|B| \leq |D|$

אז $|A| + |B| \leq |C| + |D|$

נתון A, B, C, D (זרים) כך ש $A \cap B = \emptyset$ אם"ם $C \cap D = \emptyset$

הוכחה:

נניח a, b מספרים טבעיים כך ש $|A| = a$, $|B| = b$

כמה A, B יש?

נגדיר A, B כך ש $|A| = a$ $|B| = b$ כמו כן $A \times \{1\}$, $B \times \{0\}$

$|B \times \{0\}| = |B|$ $|A \times \{1\}| = |A|$

קיימת $f: A \to C$ חח"ע ועל

קיימת $g: B \to D$ חח"ע ועל

נגדיר $h: A \cup B \to C \cup D$ חח"ע

$|A \cup B| \leq |C \cup D|$

$|A| + |B| \leq |C| + |D|$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

קל לראות ש- h מוגדרת היטב, חח"ע.

Scanned by CamScanner

שאלה:

נניח $|C| < |A|$ ו $|D| \leq |B|$ הוכח $|D| + |C| < |B| \cdot |A|$

הוכחה:

$$\aleph + \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph_0$$

$|A| + |D| \not< |C| + |D|$

שאלה:

תהיינה קבוצות $a \leq c$, $b \leq d$ אז $a \cdot b \leq c \cdot d$

הוכחה:

נבחר נציגים a, b, c, d בהתאמה

קיימים $f: A \to C$ חח"ע ועל ו $g: B \to D$ חח"ע

נגדיר $h: A \times B \to C \times D$ חח"ע

ע"י $h(a,b) = (f(a), g(b))$ נראה ש h חח"ע

דוגמאות: (עם תואר שלישי בסיס ומעלה)

תהי R קבוצת הפונקציות $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

מצאו את עוצמת $?$ והוכיחו האם $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = ?$

* $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

* $\aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = \aleph$ ראינו $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$ כי $\aleph_0 \leq \aleph$

* $\aleph^{\aleph} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph} > \aleph$

$|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$

Scanned by CamScanner

תרגילים:

שאלה:

נניח $|A| = |B|$ האם $A \subseteq B$? אם לא תנו דוגמא נגדית a, b כך ש- $a \leq b$

האם קיימות קבוצות A, B כך ש- $|A| = a$ $|B| = b$ $A \subseteq B$?

הוכחה:

נניח $|C| = a$, $|B| = b$, $|C| \leq |B|$ אזי קיימת $f: C \to B$ חח"ע

אזי $f: C \to \text{Im}f$ חח"ע ועל לכן $|\text{Im}f| = |C| = a$ ומכך $\text{Im}f \subseteq B$

ונקבל $A = \text{Im}f$ מ.ש.ל.

אריתמטיקה של עוצמות:

$$|A \cup B| = a+b \quad , \quad |A \times B| = a \cdot b \quad , \quad |A^B| = a^b$$

ניטרל לחיבור $b = a+0$

ניטרל לכפל $a = a \cdot 1$ $\quad 0 = a \cdot 0$

נשאר לחיבור? כן, אין חיסור עוצמות

$a+b = 0 \to |A \cup B| = 0 \to A \cup B = \emptyset \to$ מגיעים $A \neq \emptyset$

שאלה:

נניח ש- $a \geq c$, $b \geq d$

האם $a^b \geq c^d$? אם כן הוכיחו

משפט:

תהיינה עוצמות $a > 0$ $\quad a \geq c$ $\quad b \geq d$ אזי $a^b \geq c^d$

הוכחה:

תהיינה קבוצות $A \supseteq C$, $B \supseteq D$ $\quad A \neq \emptyset$

כך ש- $|A^B| \geq |C^D|$

Scanned by CamScanner

(1) $|A|=0$ אז $A=\emptyset$:

(2) $|A|=n$ אז $A=\{1,\dots,n\}$

(3) $|A|=\aleph_0$ אז קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to\mathbb{N}$ ועל $\mathbb{N}$ (כלומר A בת מנייה).

(4) $|A|=\mathfrak{c}$ אז $A=\mathbb{R}$ (או A שקולה ל-$\mathbb{R}$).

(5) $|A|=|V|$ כאשר V מ"ו מעל $\mathbb{Q}$ אז A שקולה ל-V כמ"ו מעל $\mathbb{Q}$.

(6) $|A|=|\mathbb{R}^n|$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ אז A שקולה ל-$\mathbb{R}^n$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$.

(7) $|A|=|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$ אז A שקולה ל-$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$.

(8) $|A|=|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$ אז A שקולה ל-$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$.

(9) $|A|=|C|$ כאשר $C\neq\emptyset$ אז A שקולה ל-C בהתאם לתקינה הנ"ל.

(10) $A=\emptyset$ אז A שקולה לכל קבוצה.

משפט: $A\neq\emptyset$ אם"ם קיימת $f:B\to A$ על.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח $f:B\to A$ על. נגדיר $g:A\to B$ ע"י $g(a)=b$ כאשר $b\in B$ כלשהו כך ש-$f(b)=a$ (קיים כי f על).

$\Rightarrow$ נניח $A\neq\emptyset$. נגדיר $f:B\to A$ ע"י:

$$f(b)=\begin{cases}g(b) & b\in\operatorname{Dom}(g)\\ a_0 & b\notin\operatorname{Dom}(g)\end{cases}$$

כאשר $a_0\in A$ כלשהו (קיים כי $A\neq\emptyset$).

משפט: $f:A\to B$ חח"ע ועל. נגדיר $f^{-1}:B\to A$ ע"י $f^{-1}(b)=a$ כאשר $f(a)=b$. אז f^{-1} חח"ע ועל.

הוכחה: f^{-1} חח"ע: יהיו $b_1\neq b_2$ ב-B. יהיו $a_1=f^{-1}(b_1)$, $a_2=f^{-1}(b_2)$. אז $f(a_1)=b_1\neq b_2=f(a_2)$ ולכן $a_1\neq a_2$.

f^{-1} על: יהי $a\in A$. אז $f(a)=b\in B$ ולכן $f^{-1}(b)=a$.

משפט: $f:A\to B$ חח"ע ועל. אז $|A|=|B|$.

הוכחה: f חח"ע ועל B ולכן f^{-1} חח"ע ועל A. לכן $|A|\leq|B|$ ו-$|B|\leq|A|$. לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין $|A|=|B|$.

משפט: $|A|=|B|$ אם"ם קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח $f:A\to B$ חח"ע ועל. אז $|A|=|B|$.

$\Rightarrow$ נניח $|A|=|B|$. אז $|A|\leq|B|$ ו-$|B|\leq|A|$. לכן קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל

תרגיל:

תהי"ג a,b,c טבעיים

1. $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$
2. $(a\cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
3. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

תרגיל:

1. נתחיל עם A,B,C קבוצות. נגדיר f חח"ע ועל.

$$f:(A^B)^C \to A^{B\times C}$$

תהי $f:C\to A^B$ אז $f(f):B\times C\to A$ ונגדיר $f(f)=g$ כך:

$$g(b,c) = f(c)(b)$$

נוכיח ש-$g:B\times C\to A$ חח"ע:

תהי"ג $f_1\neq f_2$ אז $f(f_1)\neq f(f_2)$

$f_1,f_2: \to A^B$ ו- $f_1\neq f_2$ אם"ם $c\in C$ קיים כך ש-

$f_1(c), f_2(c): B\to A$

$f_1(c)(b)\neq f_1(c)(b)$ כך ש- $b\in B$ קיים כך ש-

$f(f_1)(b,c)\neq f(f_2)(b,c)$ אם"ם $f(f_1)=f(f_2)$

על:

תהי $g:B\times C\to A$ אז $f:C\to A^B$ כך ש- $f(f)=g$ כך ש-

$$f(f)(b,c) = f(c)(b)$$

יהי $c\in C$ אז $f(c):B\to A$

יהי $b\in B$ אז $f(c)(b) = g(b,c)$ אם"ם $f(f)(b,c) = g(b,c)$.

Scanned by CamScanner

דוגמא חשובה:

נגדיר ק- D אוסף של תת-קבוצות סופיות של $\mathbb{N}$ $\quad D \subseteq P(\mathbb{N})$

$|D| = \aleph_0$

הערה:

אם $\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph$ אומר שקיים ש- $|A| = \aleph$ אז $|A| = \aleph_0$

ומהדרך אם מראים ש- $|A| \neq \aleph$ אומר שקיים $|A| = \aleph_0$

יש התאמה בין שתי הקבוצות המושג ב- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

אפשר להגדיר $f: D \to \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \cup \phi\right)$ $\quad \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^n$

$|\mathbb{N}^n| = \aleph_0$

לכן $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n\right| = \aleph_0$ כי גם איחוד, בן מניה של קבוצות בנות מניה, כאשר שהוסיפ איבר 1 (ϕ)

נסמן את התמונה

נגדיר $f: D \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \cup \phi$ $\quad f(\phi) = \phi$

יהי $A \in D$ סופי, נסמן $A = \{a_1 \ldots a_n\}$ אחד מ A סופי!

$f(\{a_1 \ldots a_n\}) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$

כאשר $a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ הם $a_1 \ldots a_n$ ממוינים מהקטן לגדול.

לדוגמא ש- f חתך $f(\{1,5,2\}) = (1,2,5)$ (סדוס

לכן $|D| \leq \aleph_0$ כיון ש- D אינסופי אבל $\aleph_0 \leq |D|$

אבי ק.ש.ב $|D| = \aleph_0$

הערה חשובה:

שאלה: יתכן B, C הניחו כך ובך.

הדמה: $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ ולכן

כאשר נשים לב אומר $|B| = \aleph_0 \Leftarrow$ אם $|B|$ זה מניח מך שקול.

$\aleph_0 = |B|$ אלא הדמה שלנו.

Scanned by CamScanner

שאלות לשלוח הוכחה (משהו שהשתמש בזה שזה הכתה)

1. תהיינה a,b עוצמות כך שלפחות אחת מהן אינסופית אזי
$$a+b=\max\{a,b\}$$

2. נגדיר פעולה ש- $a,b\neq 0$ $a\cdot b=\max\{a,b\}$

שאלה:

מהי עוצמת אוסף כל הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$

תשובה:

כמה כאלו קבוצות יש? $\mathcal{P}(\mathbb{N})=2^{\aleph_0}=\aleph$

כמה כאלו קבוצות יש ל-$\mathbb{N}$? $\aleph_0$

אינסופי $\cup$ סופי $=\mathcal{P}(\mathbb{N})$

אינסופי $|+|$ סופי $|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

$a=a+\aleph_0=\aleph$

כי $a\geq\aleph_0$ לכן $\aleph'=a$

מהי עוצמת הזו הבאלגברים?

$$(\mathbb{Q}\setminus\{\mathbb{N}\})\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$$

$$a=\aleph\rightarrow a+\aleph_0'=\aleph \qquad \aleph=|\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R}|$$

שני תרגילים:

תהי A קבוצה של קווים ישרים במישור כך ש- $|A|=\aleph_0$

האם ייתכן ש-A מכסה את כל המישור? כלומר $A\cup=\mathbb{R}^2$?

תשובה:

נשים קו ישן ב-A כל $a\in\mathbb{R}$ מתאים ישר $x=a$

לכן יש $\aleph$ קווים ב-A יש $\aleph_0$ לכן קיים קו שאינו ב-A

כל עובר ב-A תמיד את הקו הזה, פשוט שהוא לכל היותר.

נצרוק את הישרים מ-A שלא חותכים את הקו, נשאר עדיין

קבוצה מ אותה עוצמה כמו אוסף נקודות החיתוך עם הקו.

לכן A מכסה כך הקבוצה בה אינה מחתך הקו הזה.

על קו $\aleph$ נקח לכן A לא כיסתה את כל הקו,

ובוודאי שלא את כל המישור.

Scanned by CamScanner

תרגיל:

יהי A אוסף אינסופי הניתן למניה כך שלכל אינסופי $B \subseteq A$ מתקיים $|B| = |A|$.

הוכח: קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $|A| = \aleph_n$.

תשובה: לא

כלומר יש כזה $B \subseteq A$ כך ש- $|B| \neq |A|$

$f: A \to \mathbb{Q}$ פונקציה $a \in A$

$f(a) = (p,q) \in \mathbb{Q}$

f חח"ע כי אין חיתוך בין 2 נקודות (בגרף אין קו משותף ל2 נקודות).

$|A| \leq |\mathbb{Q}| \to |A| \leq \aleph_0$ ולכן $|A| \neq \aleph$

גרפים

בקורס שנים על קבוצה מינימלית.

משפט:

נתון ציור שבו אפשר לעבור על הקווים ולחזור אל הנקודה ממנה התחלנו מבלי לעבור על אותו קו פעמיים אם ורק אם יש 0 או 2 קודקודים שיש מהם מספר אי זוגי של קווים.

אי אפשר →

הגדרה:

גרף הוא סדר $G = (V, E)$

כאשר V קבוצה קודקודים ו- E קבוצה של צלעות/קשתות (קווים)

V = Vertices E = Edges

אם ב- E מאפשרים לצלע מסוימת G $\leftrightarrows$

אלא ב- E יש רק קודקודים שונים ב 2 (כלומר, אין איזון שמופיע פעם 2 קודקודים ויש 2 אפשרויות ליצור אותו קשת).

יש תמיד פעם או שאין.

$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\}$

Scanned by CamScanner

הגדרה:

1. הדרגה של קודקוד היא מס' הקודקודים שאי $|V|$
2. דרגה של קודקוד היא מס' השכנים שלו, כלומר מס' הקודקודים שהוא מחובר אליהם בגרף.

שאלה:

מהו סכום דרגות הקודקודים בגרף?

משפט:

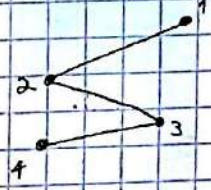
סכום דרגות הקודקודים: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$

הוכחה:

לכל צלע יש 2 קודקודים לכן היא מופיעה 1 בדרגה של כל אחד מהם.

הגדרה:

מ"ש גרף G נ"ה. $V_0 \dots V_n \in V$ קודקודים $(V_0, \dots V_n)$ עוקבים מסלול אם לכל $n \geq i \geq 1$ $E \ni \{V_{i-1}, V_i\}$ (בין כל 2 קודקודים סמוכים במסלול יש צלע)



$(1,2,3,4)$ מסלול $(4,3,2,3,4)$ מסלול?

$(1,4)$ גם מסלול

$(4,3,2)$ מסלול

הגדרה:

- מסלול עקיב פשוט אם כל קודקוד בו חוצה על עצמו פעם אחת.
- בפרט צלע, $V_0 = V_n$
- אם $V_0 = V_n$ המסלול נקרא **מעגל**.
- אורך מסלול = כמ' הצלעות = n

הגדרה:

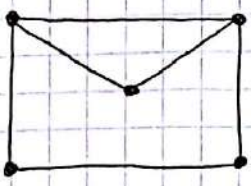
מרחק בין 2 קודקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם.

אם אין בניהם מסלול אומרים שהמרחק הוא ∞.

הקוטר של גרף הוא המרחק הגדול בין 2 קודקודים.

Scanned by CamScanner

דוגמא:



הגרף הזה 2

שימו ✔: לא מספיק לתת אחת הדוגמא

אלא **מספר** הצלע הדומה.

תזכורת:

סרק הוא סוג מסוים $G = (V, E)$ E = צלעות V = קודקודים

דרגה של קודקוד היא מס' הצלעות המחוברות אליו.

$(v_0, v_1 \dots v_n)$ סדרה של קודקודים נקראת מסלול אם יש צלע

מחברת בין כל 2 באותם.

מעגל הוא מסלול שמתחיל ומסתיים באותו קודקוד.

הדרכה:

שלב עקבו קשיר אם בין כל 2 קודקודים בסרק יש מסלול.

היחס של סרק שמקיים בין 2 קודקודים $\leftrightarrow$ יש בניהם מסלול

מצא יחס שקילות

מחלקות השקילות עבורנו נקראות קשירות

דוגמא: ⊙ ⊙

טענה:

יהי סרק עם n קודקודים ו- $n \geq k$ צלעות

אז בסרק יש לפחות $n-k$ רכיבי קשירות.

הוכחה:

הוכחה, נניח שלכל סרק עם n קודקודים

נוכיח באינדוקציה על מס הצלעות.

בסיס: $k = 0$, שלכל n רכיבי קשירות ומה אכן $n-n \geq n$

צעד: יהי k מספרו הטבעי כלשהו. נניח עבור $k+1$

נתון שאיזה יש k צלעות יש לפחות $n-k$ רכיבי קשירות

צ"ל שאם יש $k+1$ צלעות יש לפחות $n-k-1$ רכיבי קשירות.

יהי סרק עם $k+1$ צלעות. נסיר אחת מהן, אז יש לפחות $n-k$ רכיבי קשירות

אם הצלע מחברת בין קודקודים שונים כנ"ל, אם נחזיר אותה נשארנו באותו

מספר רכיבי השקילות ולכן מצלע זו $n-k \geq n-k-1$

המשך ההוכחה:

אחרי הצעד הנ"ל נקבל קשירות שאחת ויחיד לכל קשירות אחד פחות.

כיון שבין עפ"י n קודקודים בכל יש עפ"י $n-1$ ■

מסקנה:

בגרף מסדר n קשיר,
יש לפחות $n-1$ צלעות.

הוכחה:

נניח בשלילה ש כאשר הצלעות קיימות מתקיים $|E| < n-1$

כאשר רכיבי הקשירות הינו לפחות $|E| - n > (n-1) - n = -1$

לכן יש יותר מרכיב קשירות אחד בסתירה לכך שהגרף קשיר.

שאלה:

יהי גרף קשיר עם n קודקודים $|E| \geq n-1$

מצא קיים בגרף מעגל פשוט שאינו מכיל צלעות. (כל האורך 0)

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על מס הקודקודים

בסיס: $n=3$ 3 קודקודים עם לפחות 3 צלעות בה גרף המשפט
יש בו מעגל. △

צעד: יהי n שמורה הצעד נכונה. עבור $n+1$.

יהי גרף עם $n+1$ קודקודים (קשיר) $|E| \geq n+1$

שם קיים קודקוד מדרגה 1 נסיר אותו ואת הצלע שלו.

נשאר n קודקודים שלפחות n צלעות. (והגרף נשאר קשיר)

ונקבל כאופן גרף במעגל המקורי. ונקבל קיים מעגל כמו שרצינו

הסבר מדוע הגרף עדיין קשיר:

נקח 2 קודקודים בגרף. שם השלוש מונעים שהוא לקודקוד שהסרנו v_1
v_1 מחובר רק לקודקוד אחד נקרא לו v_2 $u_1 \dots v_2 v_1 \dots v$
ולכן גם כשהוא נוגע ב v_1 ונשאר עם מעגל $u_1 \dots v_2 \dots v$

Scanned by CamScanner

וכאן יש קצת צמצום. (חלק מהרשת...)

כאן כי כל הלוקחות שנכנסו אלו, בדרכם אל סוף הקווים שבלה א-ס

הצ"ם "כאן שנאבד שפע שיהיו לקוחות המקורי?

ומצאו מאלו מהסוגי קווים שבהי

כל הלוקחות שהכנסו מוכנים מהרים את הכסף בדרכם אל סופר

מכרה: קצתר הממוצע?

כיצד מהלוקחות שם נו ב צמצום ונבא קצוץ.

תכנית:

שיעור ממוצע הוא צמצום שנעשה (בתוך שנה א-ס)

בכדי שהסופר על לוקחות כפי בדרכה חוקי (סוף א-ס)

ביצוע בפרט:

ממוצע שנה א ממוצע שלושה בקבוצ מצפים שלנו.

ממוצע שהוא כבר צמצם בכדי הסוף כסוף ד נקודה ממוצע שלנו

הוכחה:

נקח לוקחות יש פעמים ב צמצום ב ד נכנס (ב-ד יוצא).

סביבם. ה לוקחות השני ציפלים ונמוקה ברשון אין ובעיר כי

(כלומר שהוגים יפני בתיהם קצתא קיבוזו סדנים שלו לקוחות שבכל

שהוא ניתנים את אלכוס מס מוסדרה בכל שהיה הלוקחות סופרים

הוא ניתנים נמצא על הלוקחות מבנין נוספים.

כי נסדים על הלוקחות הבית מוקם אחר נמצא על צמצם שנים שנת ממוצע

יש לנו מ אלכוס, נבדוק ד ממוצע הלוקחות לקחות הבית.

ממוצע הלוקחות יהיה שבה שלנו מ-ו (לפחות ב)

כיון שסופרים קשה, אין לקוחות מתרחשת ס, ולכן הממוצע ת-ב הוא

תיקון הבעיות:

Scanned by CamScanner

שאלה:

יהי n מספר טבעי וקודקוד v.

צלע יש מעגל אחד שעובר את כל הצלעות $n-2$ המעגלים.

דוגמא:



הוכחה:

$v_0 = v_n$ ... $v_0 v_1$ ... $v_i = v$ $v_j = v$

$u_0 = u_m$ ... $u_0 u_1$

$v_i \dots v_1 v_n, v_{i-1} \dots v_i, v = v_i$

$u_j \dots u_1 u_m \dots u_{j+1} u_j, u_j$

נתן המעגל שעובר את שניהם הוא: $u_j \dots u_{j+1} v_i v_{i-1} \dots v_1 v_i$

משפט אוילר:

יהי שרטט קשיר מסדר ≥ 3 אזי:

בשרטט יש מעגל אוילר אם ורק אם כל הקודקודים בשרטט יש דרגה זוגית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ עניין שיש מעגל שעובר את כל הצלעות בשרטט בדיוק פעם 1

$v_n \dots v_0$ נניח בקודקוד $v_0 \neq v$ עניין שהוא מופיע במעגל k פעמים לכן הוא מתחבר ל- $2k$ צלעות, במעגל לכן $\deg(v) = 2k$.

אם v_0 מופיע m פעמים בפעם הראשונה שנכנסנו ל v_0 דרגה היא 2 והאחרונה, סה"כ $\deg(v_0) = 2(m-1)$

נשים שפשטנו כל הקודקודים בשרטט לוזיות (כי השרטט קשיר, לכן יש לפחות צלע יוצאת מכל קודקוד), יש לנו דרגה חיובית (כי השרטט קשיר, לכן יש לפחות צלע יוצאת מכל קודקוד) נסיר את כל הצלעות במעגל שנו חוזר על עצמו. כל הדרגות נשארו זוגיות כי רצינו שבמעגל נכנסו כל קודקוד ויצא זוגיות. לכן השרטט מכיל מעגל שעובר בכל הצלעות.

אחרת, יש סוף קודקוד עם דרגה חיובית.

Scanned by CamScanner

לכן המספרים מ-1 ל-8 הם מספרי אוילר

שאשר שהמרחק את המספר ה-8 כך שהקודקוד הבא ידוע n. $\aleph_{n,\dots,8}$

מספרי אוילר עוזרי בכל הצורות ובפרט מ-1 ל-n

$1, n-1, \dots, 8, \dots, 1, 1$ מספרי אוילר.

הדרך היא מספרי אוילר שמתחילים ונגמרים בקודקודים שונים

① אם $1, n$ אינם מחוברים ישירות $\exists k \in \{1, n\}$

נניח שיש בגרף $n, 1$ קודקודים מסלול דרכה אך לא מעגל.

אם דרכים על הקודקודים יש מספר אוילר

$1-$ v_0, v_n מסלול דרכה אי מעגל.

מגדירה לחלוטין הקודמים הדרכה על קודקוד שאינו v_0 או v_n הוא מסלול

אחרת: מספרי אוילר $v_n \dots v_1, v_0$ $v_n \neq v_0$

אם מספרי אוילר הזה מעגל נכון כי הדרכים מסלולים

הוכחה:

כיוון ש מס הקשתות סופי, אחרי מס סופי של צעדים נקבל מעגל אוילר.

כסיר אותן, ונתבונן על הגרף.

$n-2$ הנקודות נשארו מחוברות אחד שאז שהוא על שלב בגרף

נלכן קיים מעגל שיכיל את הקודקוד הזה

רכיבי הקשירות של הקודקוד הזה הוא קשיר, ודרסיר על הקודקודים למעט

ובגרף זו אינה נמתקת.

המרחק המינימלי בין הקודקוד המעגל לקודקוד אחרת לעגל

הטרף היה קשור, ולכן היה מעגל מהקודקוד הזה אליו קודקוד המעגל.

אחרת יש קודקוד יותר קרוב המעגל.

(*) בראיה שיש קודקוד עם דרכה חיובית המעגל הקודם

הוכחה:

תשובה:

② אם $\exists\{u,v\} \in E$ צ"ל שיש קודקוד x ושתי שלשים ל-u ול-v מסוג $\deg(x)$ והדרישה ש u, v, מלבד שלשים לכל הקודקודים האחרים מתי דרישה מלבד לכך ש מופיע אותך. ~~$x, v, \ldots, u, x$~~

וגם מופיע אותך.

Scanned by CamScanner

יש מסלול בין v לעצמו, שעובר בדיוק פעם אחת בכל קודקוד חוץ מ-v (כלומר $v_1, v_2, \ldots, v_k, v$).
השלושי אי זוגי אם ורק אם המעגל הוא מעגל אוילר. בדיק מסלול אוילר אי זוגי כי יש n צלעות במעגל. בדיק מסלול אוילר זוגי, והשני אי זוגי שכן ההתחלה מחובר לסוף. אחרי v מחברי לקודקוד מאותה זוגי נסיר את הסוף בינתיים.
v זוגי והשני אי זוגי שכן ההתחלה מחובר לסוף. אחרי v מחברי לקודקוד מאותה זוגי נסיר את הסוף בינתיים.
אם v מחובר לקודקוד מאותה זוגי סיימנו.

יהי G גרף פשוט ויהי v קודקוד מדרגה זוגי לפחות
יש מסלול בינתים כי נכנסו קשתות.

משפט 2:
איזומורפיה של שני גרפים:
הגדרה: $n=1$ יש בדיוק 2 קודקודים מדרגה 1 והם מחוברים
ישירות.
יהי n שבורי הטענה נכונה עבור $n+1$
יהי G עם $n+1$ צלעות ויהי v קודקוד מדרגה זוגי לפחות
אם v מחובר לקודקוד מדרגה זוגי סיימנו.
אחרי v מחברי לקודקוד מאותה נסיר את הסוף בינתיים.
v זוגי והשני אי זוגי שכן ההתחלה מחובר לסוף. בדיק מסלול
שני אי זוגי כי יש n צלעות במעגל. בדיק מסלול
אם היה שני אי זוגי, המסקנה.

ב) יהי G גרף פשוט, ויהי v קודקוד מדרגה אי זוגי
הוכיחו באינדוקציה על גדל קבוצת, שיש מספר פשוט
מ-v לקודקוד אחר מדרגה אי זוגי.

פתרון 1:
n שיק לכיוון קשירות. נניח הקשירות הזאת טרך.
לפני j יש לפחות שוב קודקוד 1 עם דרגה אי זוגי
יש מסלול בינתים כי נכנסו קשתות.

פתרון 2:
איזומורפיה של שני בפעמים:

א) יהי G גרף פשוט. הוכיחו שקיים שני קודקודים
מדרגה אי זוגי (0 נחשב)

הוכחה:
ידוע שסכום דרגות הקודקודים בגרף תמיד בדיוק $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$
לכן סכום הדרגות זוגי.
אם היה שני אי זוגי אז דרגות הסכום היה
אי זוגי, סתירה.

מוגדר ב: שעה 3.

תרגיל בית שלמה 5 בי:

נגדיר יחס R על $P(\mathbb{N})$

$A R B \Leftrightarrow |A| = |B|$ המוגדר ע"י

נמצא את כל המחלקות השקילות ביחס.

מצא עוצמת $|P(\mathbb{N})/R|$

פתרון:

$$[A]_R = \{B \mid A \sim B\}$$

① $[\emptyset]_R = \{\emptyset\}$ ← $|[\emptyset]_R| = 1$

② $|A| = n$ $\quad [A]_R = \{B \mid |B| = n\}$

$[A]_R$ אינסופי $\{1, 2, \dots n\} \ni [A]_R$

$[A]_R \ni \{2, \dots n+1\}$

$|[A]_R| \geq \aleph_0$ לכן

נגדיר $f: [A]_R \to \mathbb{N}^n$ ע"י $f(\{a_1 \dots a_n\}) = (a_1 \dots a_n)$

מסדרה מהקטן לגדול.

לכן f חח"ע ולכן $|[A]_R| \leq |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| \cdots |\mathbb{N}| = \aleph_0$

לפי קנטור. $|[A]_R| = \aleph_0$

③ כפי שניתן להוכיח באינדוקציה. כפי שראינו מהלקה שקולה

כי A אינסופי אז $\aleph_0 \leq |A| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$ $\quad \mathbb{N} \supseteq A$

לכן לפי קשר $|A| = \aleph_0$

$P(\mathbb{N})$ = קבוצות אינסופיות ∪ סופיות

$|P(\mathbb{N})|$ = |סופיות| + |אינסופיות|

$\aleph = 2^{\aleph_0} \to 2^{\aleph_0} + \aleph_0 = \aleph$

↓

אינסוף בן מנייה על בן מנייה

$$\left| P(\mathbb{N})/R \right| = \aleph_0$$

$[\emptyset]_R$, $[\mathbb{N}]_R$

$[\{1\}]_R$

$\vdots$

$[\{1 \dots n\}]_R$

Scanned by CamScanner

תרגיל:

B - קבוצה כל המספרים הטבעיים שלהן רק 0 ו 1 בייצוג. $?|B| =$

נראה f חח"ע $f: \mathbb{N} \to B$

$f(1,2,3,\dots) = 10110101110\dots$

על מנת לקבל כמה אחדות יהיו אך ה 0 תמיד.

f חח"ע $\aleph_0 = 2^{\aleph_0} > |B| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$

$B \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ כך ש $|B| = \aleph$

אזי $|B| \leq 2^{\aleph_0}$

שאלה 5:

R יחס על $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ המוגדר ע"י $fRg \Leftrightarrow \forall n \; f(n) - g(n) \neq (-1)^n$

בהרצאה:

הוכחנו כי לכל A אינסופית קיימות $B, C \subseteq A$ כך ש-

$|B| = |C| = |A|$ (השתמשנו בכך ש- $|A \times A| = |A|$).

זכרו שקיימת $f: A \times A \to A$ חח"ע ועל.

A אינסופית בהכרח $a, b \in A$

$|A \times \{a\}| = |A| \cdot 1 = |A|$ $a \neq b$ $|A \times \{b\}| = |A|$

$f|_{A \times \{a\}} : A \times \{a\} \to f[A \times \{a\}]$ חח"ע ועל

$|f[A \times \{a\}]| = |A \times \{a\}| = |A|$

$f[A \times \{a\}] = B$ בהכרח $f[A \times \{b\}] = C$ ו-

$B, C \subseteq A$ $|B| = |C| = |A|$

$B \cap C = \varnothing$ כי f חח"ע ו- $a \neq b$

$x \in f[A \times \{a\}]$ כך ש $f(x, a) = b$

$x \in f[A \times \{b\}]$ כך ש $f(x, b) = c$

f חח"ע כך ש $(x, a) = (y, b)$ הכרחי כי $a \neq b$.

Scanned by CamScanner

כמה יחסי אקוויוולנטיות יש על $\mathbb{R}$?

כמה היחסים עליהם $f \mathrel{R} g \leftrightarrow$

$f \neq g$ כולם

ד. כמה יחס שקול

א. $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/_{R}| = ?$

ב. $|[f]_R| = ?$

---

(1) הפתרונות:

תהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ונגדיר $f R f$

לכן יש לפחות 1 איברים.

סימטריות:

יהיו $f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך ש- $f R g$ ונגדיר $g R f$

ברור כי אם היחסים שווים ב- f,g = לאותם הסדרים

שונים מ- f,g. לכן אם השניים חלק כולו.

טרנזיטיביות:

יהיו $f,g,h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך ש- $f R g$ ואם $g R h$ גם $f R h$

f,g שווים על A

h,g שווים על B

לכן h,f שווים על $\mathbb{R} \setminus \{A \cup B\}$ כי הם שווים ל $h \circ g = f$

לכן h,f שווים גם על $A \cup B$ ומכאן כולם.

(שווים על כולו, כולו).

(2) תהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ונגדיר $|[f]_R| =$

נבנה ~~[illegible]~~

נסמן ב- A את שני הקבוצות הכולנו של $\mathbb{R}$

נסמן ב- B כולו פ' ה- h'ים על איברים ב- $\mathbb{R}$

$$\Psi : [f]_R \to B \times A$$

כאשר $g \in [f]_R$ נסמן ש- $f \neq g$ על $\{a_1 \dots a_n\}$

$$\Psi(g) = \{a_1 \dots a_n\} \times (f(a_1), \dots, f(a_n))$$

$a_1 \dots a_n$ מוגדרים מהקבוצה. Ψ חח"ע ועל

$|A| = |B| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph$

$|B| = \aleph$ $\quad B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

$|[f]_R| = \aleph$ ב־ הוכחנו

$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R| = ?$ ⓔ

שים ♥: $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R| \cdot |[f]_R|$

צריך להראות שהפונקציה מטה מוגדרת היטב.

$\Psi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R \times \mathbb{R}$

$\Psi(f) = \left([f]_R \text{ (מייצג המחלקה)}, \text{מספר שקיומו} \right)$

$g : [f]_R \to \mathbb{R}$ מוגדר ע"י

$\Psi(f) = ([f]_R, g(f))$

$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R| \cdot \aleph$ לכן

$2^{\aleph} = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R| \cdot \aleph$

לכן $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R| = 2^{\aleph}$

$f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$ הוכיחו!

$R \cup S$ ו"ס הוכיחו!

$(A \times A \setminus R) \cup I_A$ הוכיחו!

Scanned by CamScanner

הוכיחו: $\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_{k+n}\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k+n}\right)$

יהי $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{n=0}^{\infty} A_{k+n}$ אזי $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k+n}$

נשים לב קיים k כך ש- $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{k+n}$

לכן לכל n $x \in A_{k+n}$

לכל n קיים k כך ש- $x \in A_{k+n}$

מה שנכון כי (בחר את) ה-k הקבוע שלנו.

הוכיחו שבאמצעות לכל נוסחה בת n משתנים

נוסחה שקולה המכילה את $\wedge, \vee, \neg$ בלבד.

בכל שאחת מ-23 ה טענה אפשרי בטבלת אמת

בס"ד: $n=1$

p_1				
T	T	T	F	F
F	T	F	F	T

$\begin{pmatrix} T \\ T \end{pmatrix} \rightarrow p_1 \vee \neg p_1$

$\begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix} \quad p_1 \wedge \neg p_1$

$\begin{pmatrix} T \\ F \end{pmatrix} \quad p_1$

$\begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \quad \neg p_1$

נניח נכון ל- n משתנים

נראה כאשר יש $n+1$ משתנים

p_{n+1}	p_1 --- p_n	
T ⋮ T		
F ⋮ F		

נשים לב כי $p_1 \cdots p_n$ שקולה ל- ψ_1

" ψ_2

$(p_{n+1} \wedge \psi_1) \vee (\neg p_{n+1} \wedge \psi_2)$

Scanned by CamScanner

④ הכיתו שהצמד נכונים מקור $\vee'$ ו- מלבד
גם מעגן ניכיב בסוק שקול ל- $\wedge$ ע"י האחרים

$$(\bar{b} \vee d)' = b \wedge \bar{d}$$

⑤ ~~הוכיחו~~ הוכיחו את בסק ע"י $\wedge'$ ו- מלבד

$$= (d \leftarrow b) \vee (b \leftarrow d)$$

~~$b \wedge \bar{d} \vee \bar{b} \wedge d$~~

$$= (d \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{d}) =$$

~~$= (d \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{d})$~~

$$((d \wedge \bar{b})' \wedge (b \wedge \bar{d}))'$$

Scanned by CamScanner