

הצעת פתרון – מתמטיקה בדידה סמסטר קיץ מועד א' התשפ"ו

עדי מכנס

1. (9 נקודות כל סעיף) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

א. $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

פתרון:

נפריך את הטענה. נביט בקבוצות:

$$A = \{1\}$$

$$B = C = \emptyset$$

ואז:

$$A \cup (B \Delta C) = A = \{1\}$$

אבל

$$A \cup B = A \cup C = A = \{1\}$$

ולכן

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \emptyset$$

ב. אם $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $C \subseteq A \cup B$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. יהי $c \in C$ וצ"ל $c \in A \cup B$. לכן $\{c\} \in \mathcal{P}(C)$ שכן $\{c\} \subseteq C$. מכאן $\{c\} \in \mathcal{P}(A)$ או $\{c\} \in \mathcal{P}(B)$, ונחלק למקרים.

אם $\{c\} \in \mathcal{P}(A)$, הרי ש $\{c\} \subseteq A$ ומכאן $c \in A$ ובפרט $c \in A \cup B$.

אחרת, אם $\{c\} \in \mathcal{P}(B)$, הרי ש $\{c\} \subseteq B$ ובאותו אופן $c \in A \cup B$.

משל ■.

ג. אם $A \cap B = \emptyset$ אז $A \cap (A \times B) = \emptyset$.

פתרון:

נפריך את הטענה. נביט בקבוצות הבאות:

$$A = \{1, (1,2)\}$$

$$B = \{2\}$$

ברור כי $A \cap B = \emptyset$, אבל:

$$A \times B = \{(1,2), ((1,2), 2)\}$$

ואכן $A \cap (A \times B) = \{(1,2)\} \neq \emptyset$

2. (7 נקודות כל סעיף) פונקציה $f: A \rightarrow B$ תקרא תת-על אם הקבוצה $B \setminus \text{Img}(f)$ סופית.

תהינה $f: A \rightarrow B$ ו $g: B \rightarrow C$ פונקציות. הוכיחו/הפריכו:

א. אם f, g שתיהן תת-על אז ההרכבה $g \circ f$ היא תת-על.

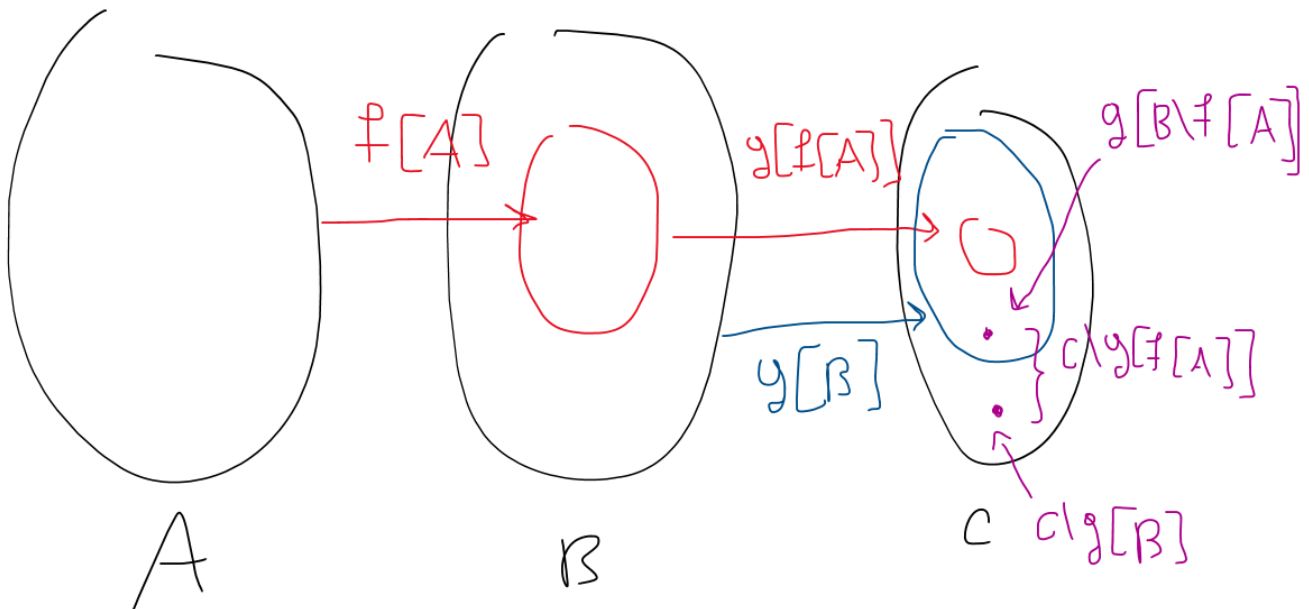
פתרון:

נוכיח את הטענה. נוכיח טענת עזר:

טענת עזר: תהינה $f: A \rightarrow B$ ו $g: B \rightarrow C$. אזי: $C \setminus \text{Img}(g \circ f) \subseteq (C \setminus \text{Img}(g)) \cup g[B \setminus \text{Img}(f)]$

הוכחה: יהי $c \in C \setminus \text{Img}(g \circ f)$ ונחלק למקרים. אם $c \in C \setminus \text{Img}(g)$, סיימנו. אחרת, $c \in \text{Img}(g)$ (ובעצם $c \in g[B]$) ולכן קיים b כך ש $g(b) = c$. נב"ש ש $b \in \text{Img}(f)$, לכן קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$, ואז $g(f(a)) = c$ וזה סתירה, כי מתקיים ש $c \in \text{Img}(g \circ f)$. לכן $b \notin \text{Img}(f)$, ולכן $c \in g[B \setminus \text{Img}(f)]$. ■ משל

הסבר רעיוני לטענת העזר: אם איבר c לא הגיע דרך מישהו מ a , זה אומר שאו שהוא לא יכול להגיע דרך g (קבוצה שמאלית באיחוד) או שהוא יכול להגיע דרך g , אבל לא דרך f .



כעת, כיוון שמדובר באיחוד זר:

$$|C \setminus \text{Img}(g \circ f)| \leq |C \setminus \text{Img}(g)| + |g[B \setminus \text{Img}(f)]|$$

$$\leq |C \setminus \text{Img}(g)| + |B \setminus \text{Img}(f)|$$

שימו לב ש $|g[B \setminus \text{Img}(f)]| \leq |B \setminus \text{Img}(f)|$, כי "אי-חח"ע" גורם לכך שכמות האיברים השונים בתמונה תקטן. המקרה הכי גדול הוא במקרה בו g חח"ע ואז הגודל נשמר.

אבל, נתון ש f, g תת-על ולכן הגודל הזה סופי, ולכן גם הקבוצה שגודלה קטן יותר מקבוצה סופית ג"כ סופית. משל ■.

ב. אם $f \circ g$ היא תת-על אז g היא תת על.

פתרון:

נוכיח את הטענה. תחילה נוכיח טענות עזר.

טענת עזר 1: תהיינה $f: A \rightarrow B$ ו $g: B \rightarrow C$ פונקציות. אזי $\text{Img}(g \circ f) \subseteq \text{Img}(g)$.

הוכחה: יהי $c \in \text{Img}(g \circ f)$. לכן קיים $a \in A$ כך ש $c = (g \circ f)(a)$. לכן אם נסמן $b = f(a) \in B$, אזי נקבל כי גם $c = g(b)$, ולכן $c \in \text{Img}(g)$, משל ■.

הסבר רעיוני: הקטנת התחום מקטינה את הטווח.

טענת עזר 2: תהיינה $A \subseteq B \subseteq U$, כאשר U קבוצת עולם. אזי $B^c \subseteq A^c$.

הוכחה: נב"ש שהטענה לא מתקיימת. לכן קיים $x \in U$ כך ש $x \notin B$ וגם $x \in A$. מהנתון, $A \subseteq B$ ולכן $x \in B$ וזוהי סתירה. משל ■.

סה"כ, משילוב שתי טענות העזר נקבל כי:

$$C \setminus \text{Img}(g) \subseteq C \setminus \text{Img}(g \circ f)$$

ומכאן:

$$|C \setminus \text{Img}(g)| \leq |C \setminus \text{Img}(g \circ f)|$$

אבל $C \setminus \text{Img}(g \circ f)$ כי $f \circ g$ היא תת-על, וכך גם g . משל ■.

3. (7 נקודות כל סעיף) תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ כך:

$$y_1 S y_2 \Leftrightarrow |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y_1\}| = |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y_2\}|$$

א. הוכיחו כי S יחס שקילות על $\mathbb{R}$.

פתרון:

אפשר להוכיח ישירות, אך אפשר לשים לב כי מדובר בשוויון עוצמות שראינו בהרצאה שהוא יחס שקילות.

ב. נניח כי f מוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה, $\mathbb{R}/S$. קבעו האם העוצמה סופית. $\aleph_0, \aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

פתרון:

יהי $y \in \mathbb{R}$. אם $y < 0$ אז $[y]_S = (-\infty, 0)$ כי $x^2 \geq 0$ לכל x , ולכן $|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| = 0$.

אם $y = 0$ אז $[0]_S = \{0\}$ כי $y^2 = 0$ אם ורק אם $y = 0$.

אם $y > 0$ אז $[y]_S = (0, \infty)$, כיוון שלכל $y > 0$ קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $x^2 = y$, הלוא הם $\pm\sqrt{y}$, ולכן $|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| = 2$.

סה"כ, אפשר לראות כי:

$$\mathbb{R}/S = \{[-1]_S, [0]_S, [1]_S\}$$

ולכן עוצמת קבוצת המנה היא סופית, והיא 3.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם f הפיכה אז $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. אם f הפיכה, אזי מחד-חד ערכיות של f נקבל כי לכל $y \in \mathbb{R}$:

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| \leq 1$$

ומכיוון ש f על אז יש ל y מקור ב f , ולכן:

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| \geq 1$$

סה"כ:

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| = 1$$

זאת לכל y , ולכן $y_1 S y_2$ לכל $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, ומכאן $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. משל ■.

ד. הוכיחו/הפריכו: אם $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, אז f הפיכה.

פתרון:

נפריך את הטענה. נביט בפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x) & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

כאשר $k \in \mathbb{Z}$. יהי $y \in \mathbb{R}$ ונחלק למקרים.

אם $y \neq 0$, אז:

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| = |\{\arctan(y) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}| = \aleph_0$$

אם $y = 0$, אז:

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}| = \left| \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right| = \aleph_0$$

סה"כ הוכחנו שלכל y :

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}| = \aleph_0$$

ולכן $y_1 S y_2$ לכל $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, כלומר $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, אבל בוודאי ש f אינה הפיכה כי $\tan(x)$ אינה הפיכה.

4. (6 נקודות כל סעיף) תהיינה a, b, c עוצמות, כולן שונות מ 0.

א. הוכיחו: $(a + b)^c \geq a^c + b^c$.

פתרון:

תהיינה נציגות לעוצמות A, B, C כך ש $|A| = a, |B| = b, |C| = c$ וגם $A \cap B = \emptyset$. בהרצאה ראינו כיצד אפשר לעשות כך, ע"י כך שנגדיר $A' = A \times \{0\}$ וכן $B' = B \times \{1\}$. ברור מכיון ש $a, b, c \neq 0$ כי $A, B, C \neq \emptyset$.

נגדיר פונקציה:

$$f: A^C \cup B^C \rightarrow (A \cup B)^C$$

על ידי הכלל הבא. תהי $g \in A^C \cup B^C$ ונגדיר:

$$f(g)(x) = g(x)$$

הגדרה זו מוגדרת היטב בגלל ש $A \cap B = \emptyset$. לכן גם $A^C \cap B^C = \emptyset$.

כעת נוכיח חח"ע. תהיינה $f(g_1) = f(g_2)$ וצ"ל כי $g_1 = g_2$. תחילה, אם $g_1 \in A^C$ וגם $g_2 \in B^C$, אזי עבור $x_C \in C$ כלשהו (שקיים כי $C \neq \emptyset$) מתקיים כי:

$$f(g_1)(x_C) = g_1(x_C) \in A$$

אבל:

$$f(g_2)(x_C) = g_2(x_C) \in B$$

בסתירה לכך ש $g_1 = g_2$. גם אם $g_2 \in A^C$ וכן $g_1 \in B^C$ ישנה סתירה באותו אופן. סה"כ הראנו שהתחום והטווח שווים.

כעת נניח כי $g_1, g_2 \in A^C$, עבור B^C ההוכחה זהה. יהי $x \in C$. לכן:

$$f(g_1)(x) = g_1(x)$$

וכן:

$$f(g_2)(x) = g_2(x)$$

והוכחנו. משל ■.

4.ב. הוכיחו או הפריכו: אם b אינסופית אז $(a + b)^c = a^c + b^c$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. נחלק למקרים. אם $b \geq a$, אז:

$$a^c + b^c = b^c$$

המעבר נובע מכך ש $a^c \leq b^c$, וכן b עוצמה אינסופית, ומכאן b^c אינסופית וגדולה יותר (או שווה) מ a^c (עקרון הסכום). מנגד:

$$(a + b)^c = b^c$$

גם כן מעקרון הסכום (כי $a + b = b$), ובסה"כ נקבל כמבוקש.

אחרת, $a > b$, אבל b אינסופית ולכן כך גם a , ומאותו טיעון נקבל שוויון, כמבוקש. משל ■.

5. תהא A קבוצה המקיימת $2 \leq |A|$.

נגיד שיחס R על A הוא מחליף אם:

$$\forall a, b, c, d \in A: [aRb \wedge cRd] \Rightarrow [aRd \wedge cRb]$$

א. (5 נקודות) יהא R יחס על A . הוכיחו: אם R מחליף אז R טרנזיטיבי.

פתרון:

יהיו $a, b, c \in A$ כך ש $aRb \wedge bRc$. לכן, בגלל ש R מחליף, נקבל כי:

$$aRc \wedge bRb$$

ולכן בפרט aRc . כמבוקש, משל ■.

ב. יהא R יחס על A שהוא מחליף ואנטי-סימטרי. הוכיחו: $|R \cap I| \leq 1$ (כאשר I מייצג את יחס הזהות על A).

פתרון:

נניח בשלילה ש $|R \cap I| \geq 2$. לכן, קיימים $a, b \in A$ (שונים) כך ש $aRa \wedge bRb$. כעת בגלל ש R מחליף נקבל כי:

$$aRb \wedge bRa$$

אבל בגלל ש R אנטי-סימטרי נקבל כי $a = b$, בסתירה. משל ■.

ג. (5 נקודות כל סעיף) נסמן ב $\mathcal{S}$ את קבוצת כל היחסים R על A שמקיימים R מחליף ואנטי-סימטרי ו $R \cap I = \emptyset$. ונתבונן ב $\mathcal{S}$ עם יחס ההכלה.

i. הוכיחו שקיים $R \in \mathcal{S}$ מקסימאלי.

פתרון:

נביט בשרשרת $\emptyset$ של יחסים כנ"ל. היא מוכלת בשרשרת מקסימאלית $C \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$ (ע"פ האוסדורף) ביחס ההכלה. נוכיח כי:

$$R = \bigcup_{S \in C} S$$

ונוכיח כי $R \in \mathbb{S}$. לפני כן, נבחין שברור כי R מקסימלי, אחרת היה יחס נוסף $T \in \mathbb{S}$ כך ש $R \subseteq T$, היינו מגדירים שרשרת חדשה $C' = C \cup \{T\}$, בסתירה למקסימליות של C .

R - מחליף: יהיו a, b, c, d כך ש $aRb \wedge cRd$. לכן, קיימים X_1, X_2 יחסים ב C כך ש $aX_1b \wedge cX_2d$. כיוון ש C שרשרת, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $X_1 \subseteq X_2$ (אחרת נחליף את השמות). לכן גם aX_2b . מכאן בגלל ש X_2 יחס מחליף נקבל כי:

$$aX_2d \wedge cX_2b$$

ולכן גם כן נקבל (כי R איחוד כללי של קבוצות ש X_2 נמצאת בהם) ש $aRd \wedge cRb$ כמבוקש.

R - אנטי-סימטרי: יהיו $a, b \in A$ כך ש $aRb \wedge bRa$. לכן קיימים X_1, X_2 יחסים ב C כך ש:

$$aX_1b \wedge bX_2a$$

כאמור בגלל ש C שרשרת אפשר להניח כי $X_1 \subseteq X_2$ (אחרת ההוכחה דומה עד כדי החלפת השם) ולקבל כי aX_2b . כעת בגלל ש $X_2 \in \mathbb{S}$ הוא בעצמו אנטי-סימטרי ולכן $a = b$ כמבוקש.

$R \cap I = \emptyset$. נניח בשלילה כי $R \cap I \neq \emptyset$, כלומר קיים $a \in A$ כך ש aRa . לכן קיים $X \in C$ שרשרת כך ש aXa , ולכן $X \cap I \neq \emptyset$, בסתירה ש $X \in \mathbb{S}$.

משל ■.

ii. נתון $R \in \mathbb{S}$ מקסימאלי.

הוכיחו שקיימות קבוצות A_1, A_2 כך ש $\{A_1, A_2\}$ חלוקה של A ובנוסף מתקיים $R = A_1 \times A_2$.

פתרון:

הפתרון הזה קצת טיפשי, כי הבנייה שלו די פשוטה. נגדיר:

$$A_1 = \{a \in A \mid \exists b \in A: aRb\}$$

$$A_2 = \{a \in A \mid \exists b \in A: bRa\}$$

ברור כי

$$A_1 \times A_2 = R$$

אך עלינו להוכיח כי מדובר בחלוקה. תחילה, אם A_1 ריקה (וכנ"ל A_2) אז $R = \emptyset$. אבל אפשר לקחת את היחס:

$$T = \{(a, b)\}$$

כאשר $a \neq b \in A$ (קיימים כאלו כי $|A| \geq 2$). היא עונה על כל הדרישות באופן ריק (הרוב קליל, לגבי המחליף שימו לב כי:

$$aTb \wedge aTb \Rightarrow aTb \wedge aTb$$

וזה נכון), אך כמובן $R \subseteq T$ בסתירה למקסימאליות של R .

עכשיו נוכיח כי $A_1 \cup A_2 = A$. נניח בשלילה שקיים $a \in A$ כך ש $a \notin A_1 \wedge a \notin A_2$. לכן נגדיר את היחס:

$$T = R \cup \{ (a, x) \mid x \in A_2 \setminus \{a\} \}$$

(לצורך נוחות הפתרון נסמן את הקבוצה החדשה המוגדרת ב D)

נבחין ש $D \neq \emptyset$ (אחרת סתירה). קל לראות ש $T \cap I = (R \cap I) \cup (D \cap I) = \emptyset$. כמו כן לא מתקיים שקיים איבר $b \in A$ כך ש bRa (כי $a \notin A_2$) ולכן T עדיין נשאר אנטי-סימטרי. (אפשר לפרמל יותר, אוותר על התענוג). נותר להוכיח שהוא מחליף. יהיו $x, y, z, w \in A$ כך ש:

$$xTy \wedge zTw$$

נחלק למקרים. אם $x = a \wedge z = a$ אזי ברור כי aTw לפי הגדרה, כמו"כ גם aRy .

אם $x = a \wedge z \neq a$, ברור כי xTw וכן zRy משום ש y מתאים גם עבור $b \neq a$, כלומר:

$$bRy \wedge zRw$$

ובכך zRy , ולכן גם zTy .

אם $x \neq a \wedge z = a$, באותו אופן מתקיים ש xRw וכן ברור כי aTy כי הוא מתאים ל x , שאינו a .

אם $x \neq a \wedge z \neq a$ מצבנו מעולה.

סה"כ $R \subseteq T \in \mathcal{S}$ בסתירה למקסימליות של R .

לבסוף, נבחין כי $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, שכן אחרת, מתקיים שקיים $a \in A$ כך שקיים b כך ש aRb וכן קיים c כך ש cRa , ולכן גם aRa , ולכן $R \cap I \neq \emptyset$ בסתירה.

משל ■.

iii. נניח ב A יש n איברים. מצאו כמה יחסים $R \in \mathcal{S}$ שהם מקסימאלים?

פתרון:

ראינו בסעיף הקודם שיחס מקסימלי משרה חלוקה. האם חלוקה משרה יחס מקסימלי?

תהי חלוקה $\{A_1, A_2\}$ של A . נגדיר:

$$R = A_1 \times A_2$$

נוכיח כי R הינו יחס ב $\mathcal{S}$, ולאחר מכן נוכיח מקסימליות.

תחילה, ברור כי R הינו אנטי-סימטרי, כיוון שלא ייתכן ש $aRb \wedge bRa$, כי אז $a \in A_1 \wedge A_2$, בסתירה – ואז שקר גורר כל דבר.

כמו"כ מאותו טיעון ברור שלא מתקיים כי aRa , ולכן $R \cap I = \emptyset$.

נוכיח שהוא מחלק. יהיו $a, b, c, d \in A$ כך ש $aRb \wedge cRd$. לכן $a, c \in A_1, b, d \in A_2$ ובפרט:

$$aRd \wedge cRb$$

כמבוקש.

כעת נוכיח מקסימליות. נב"ש שקיים יחס $R \subset T$ ב S כך ש aTb ולא מתקיים aRb . לפיכך, נבחין שבהכרח מתקיים ש $a \notin A_1 \wedge b \notin A_2$. כמו כן ברור כי $a \notin A_2 \wedge b \notin A_1$, אחרת גם bTa ואז $b = a$, ואז $T \cap I \neq \emptyset$ בסתירה! לכן בהכרח a, b באותה קבוצה. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $a, b \in A_1$. כיוון ש $A_2 \neq \emptyset$ (מהגדרת חלוקה), ישנו $c \in A_2$ כך ש $aRc \wedge bRc$, ובכך:

$$aTc \wedge aTb$$

ולכן

$$aTb \wedge bTc$$

ואז

$$aTc \wedge bTb$$

ואז $T \cap I \neq \emptyset$ בסתירה!!!!!!

סה"כ, ראינו כי יחס יותר חלוקה וחלוקה יוצרת יחס. לכן מקנטור שרדר ברנשטיין אפשר להסיק שכמות היחסים לעיל שווה לכמות החלוקות בגודל 2.

כמה כאלה יש? אנחנו לוקחים תת קבוצה $X \subseteq A$ שאינה טריוויאלית (ריקה או כל A) ומגדירים את החלוקה $\{X, X^c\}$. כמות הבחירות לכך היא $2^{|A|} - 2 = 2^n - 2$