תרגיל 6 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$$

פתרון: לפי נוסחת קושי לנגזרות עם

$$f(z) = e^{2z}$$

נקבל ש

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(-1) = \frac{2\pi i}{6}\cdot 8e^{-2} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

(ב)

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos\pi z}{(z^2-1)^2}\mathrm{d}z$$

פתרון: קל לראות שבעצם יש לנו:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos\pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

בתחום המדובר

$$f(z) = \frac{\cos\pi z}{(z+1)^2}$$

אנליטית ולכן

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos\pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i f'(1) = 2\pi i\frac{-\sin\pi\cdot 4 - 2(1+1)\cos\pi}{2^4} = \frac{\pi i}{2}$$

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת כי $|f(z)| \leq M|z|^n$ עבור $M > 0$ כלשהוא.
הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה n לכל היותר.
רמז: חזרו על ההוכחה של משפט ליוביל.

פתרון: מספיק להוכיח שלכל z_0 מתקיים $f^{n+1}(z_0) = 0$. לפי משפט קושי, לכל $R > 0$ מתקיים

$$f^{n+1}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} \mathrm{d}z$$

לפי משפט של חסם לאיטגרל

$$\begin{aligned}|f^{n+1}(z_0)| &= |\frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} \mathrm{d}z| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{M|z|^n}{R^{n+2}} 2\pi R \leq (n+1)! \frac{M(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}}\end{aligned}$$

אם נשאיף את R לאינסוף , הביטוי הימני ישאף ל 0 ולכן $f^{n+1}(z_0) = 0$ כנדרש.

3. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול $\{z \mid |z| \leq 1\}$
הדרכה: כתבו $z = x + iy$ (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).
פתרון: נכתוב $z = x + iy$ ונקבל ש

$$\begin{aligned}f(x+iy) &= x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3yi + 2 \\ &= x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x-3)y\end{aligned}$$

אנחנו מחפשים למעשה מקסימום של הפונקציה

$$|f(z)| = \sqrt{(x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2 y^2}$$

לשמחתנו פונקציה זו מקבלת מקסימום בדיוק איפה שהפונקציה

$$|f(z)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2 y^2$$

מקבלת מקסימום מה שמביא אותנו לביטוי טיפה יותר נחמד.
אנחנו כמובן יודעים בוודאות שהמקסימום קיים כי כל הפונקציות רציפות על קבוצה סגורה וחסומה
לפי עקרון המקסימום,ידוע שמקסימום מתקבל בנקודה שנמצאת על שפת המעגל,דהיינו בנקודה שמקיימת $y^2 = 1 - x^2$. נציב גם את האינפורמציה הזאת ונקבל שמחפשים מקסימום עבור

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 - 1 + x^2 - 3x + 2)^2 + (2x-3)^2(1-x^2) \\ &= (2x^2 - 3x + 1)^2 + (4x^2 - 12x + 9)(1 - x^2) \\ &= 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 3x + 2x^2 - 3x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x^4 + 12x^3 - 9x^2 \\ &= 8x^2 - 18x + 10\end{aligned}$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום של

$$f(x) = 8x^2 - 18x + 10$$

אבל נשים לב שאנחנו חיים בקטע $[-1,1]$ (אלה הערכים האפשריים של x). נגזור ונקבל

$$f'(x) = 16x - 18$$

כלומר הפונקציה יורדת לאורך כל תחום ההגדרה ולכן המקסימום יהיה בנקודה $x = -1$ כלומר מקסימום יתקבל בנקודה $z = -1$

4. תהי $f(z)$ אנלטית בעיגול היחידה (כלומר ב $\{z \mid |z| < 1\}$) עם התכונה שלכל z כך ש $0 < |z| < 1$ מתקיים ש $|f(z)| \le \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס.
פתרון: היות ש

$$\lim_{x \to 1^-} \ln \frac{1}{x} = 0$$

ולפי סנדויץ אנחנו מקבלים ש

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 0$$

ולכן אם נגדיר $g(z)$ לפי

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & |z| < 1 \\ 0 & |z| = 1 \end{cases}$$

אז זאת תהיה פונקציה אנליטית בפנים עיגול היחידה ורציפה על שפתו. לפי עקרון ה $\max$ היא מקבלת מקסימום על השפה. אבל הערך של $|g(z)|$ על עיגול היחידה עצמו הוא 0. ולכן בהכרח

$$g(z) = 0$$

ובפרט

$$f(z) = 0$$

כנדרש.

5. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z-a| = R\}$. כמובן f חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \le M$ לכל z כך ש $|z-a| = R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

פתרון: נסמן ב Γ_R את העיגול שמרכזו ב a ורדיוסו R. לפי נוסחת קושי מתקיים

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

ולכן

$$|f^{(n)}(a)| \leq |\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z| = \frac{n!}{2\pi}|\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z|$$

לפי חסם ML. מתקיים

$$|\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z| \leq \frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{2\pi M}{R^n}$$

וכך מקבלים הדרוש.