פתרון תרגיל בית 7 – אינפי 1

1. הוכיחו שמהתבדרות הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא ניתן להסיק אודות התבדרות/התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$.

הוכחה: יש להביא שתי דוגמאות נגדיות.

<u>דוגמא ראשונה</u>:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ מתכנס

נוכל לבחור: $a_n = n^2$ ולקבל את הדרוש.

<u>דוגמא שניה</u>:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ מתבדר.

נוכל לבחור: $a_n = n$ ולקבל הדרוש.

2. הוכיחו: אם הטורים $\sum a_n^2$ ו $\sum b_n^2$ מתכנסים אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

הוכחה: $0 \le (|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 - 2|a_n b_n| + b_n^2$ ולכן $2|a_n b_n| \le a_n^2 + b_n^2$. הטור $\sum \left(a_n^2 + b_n^2\right)$ מתכנס כסכום של שני טורים מתכנסים. לכן הטור $\sum 2|a_n b_n|$ מתכנס, ממבחן ההשוואה הראשון. מכאן, הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

3. הוכיחו: אם הטור $\sum a_n^2$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{a_n}{n}$ מתכנס בהחלט.

הוכחה:

ניעזר בשאלה 2 (בקובץ זה). ניקח $b_n = \frac{1}{n}$. ידוע ש $\sum b_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לכן הטור $\sum |a_n b_n| = \sum \frac{|a_n|}{n}$ מתכנס לפי שאלה 2.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה b_n.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח שהטור מתכנס כלומר $\sum|a_n|<\infty$. תהי b_n סדרה חסומה כלשהי, לכן קיים k כך ש $|b_n|\le k$ ולכן $|a_nb_n|=|a_n||b_n|\le k|a_n|$ ולפי מבחן ההשוואה $\sum|a_nb_n|<\infty$ ולכן הטור $\sum a_nb_n$ מתכנס.

$\Rightarrow$שימו לב, נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס **לכל** סדרה חסומה, ובפרט לכל סדרה **חסומה** שנבחר.

כעת, נגדיר את הסדרה b_n באופן הבא: בכל האינדקסים בהם $a_n=0$ נגדיר $b_n=0$, ואחרת נגדיר $b_n=\frac{|a_n|}{a_n}$. כלומר: $b_n=\begin{cases}0 & a_n=0\\ \frac{|a_n|}{a_n} & otherwise\end{cases}$. כעת, $|b_n|=\begin{cases}0 & a_n=0\\ \left|\frac{|a_n|}{a_n}\right| & otherwise\end{cases}=\begin{cases}0 & a_n=0\\ 1 & otherwise\end{cases}$; לכן b_n סדרה חסומה על ידי 1. לכן לפי הנתון $\sum a_nb_n<\infty$ אבל $\sum a_nb_n=\sum|a_n|$ כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט כפי שרצינו.

5. בדקו את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים הבאים:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$

פתרון: נבדוק דבר ראשון התכנסות בהחלט, כלומר האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$ מתכנס. נסתכל על $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^3}\frac{(n!)^3}{3^{n^2}}=\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$. נוכיח באינדוקציה כי $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ לכל n.

עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור n נוכיח עבור $n+1$:

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^{2(n+1)+1}}{\left((n+1)+1\right)^3} = \frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3+3(n+1)^2+3(n+1)+1} \geq$$

$$\geq \frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3+3(n+1)^3+3(n+1)^3+(n+1)^3} = \frac{9}{8}\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3} \geq \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3} > 1$$

(השלב האחרון לפי הנחת האינדוקציה)

לכן $|a_n|$ מונוטונית עולה וגדולה ממש מאפס ולכן בהכרח $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ולכן למעשה הטור מתבדר.

חשוב! לא השתמשנו במבחן דלאמבר כי מהעובדה ש $\forall n: \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לא נובע בהכרח $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}$

פתרון: נבדוק התכנסות בהחלט. $\left|\frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}\right| \leq \left|\frac{1}{n^{5/4}}\right| = \frac{1}{n^{5/4}}$. אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha > 1$ מתכנס כפי שראינו בכיתה (לפי מבחן העיבוי). במקרה שלנו $\alpha = \frac{5}{4} > 1$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}\right|$ מתכנס. בסיכום הטור שלנו מתכנס בהחלט (ולכן כמובן גם מתכנס)

c. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^2}$

פתרון: נבדוק אם הטור מתכנס בהחלט $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^2}$. קל לראות שהסדרה $\frac{1}{(\log n)^2}$ מקיימת את תנאי מבחן העיבוי, ולכן הטור הנ"ל מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{(\log(2^n))^2}$ מתכנס. אבל

$\frac{1}{\log^2 2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n\log(2))^2} = \sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{(\log(2^n))^2}$. קל להוכיח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ מתקיים

$\frac{2^n}{n^2} \geq 1$ ולכן בפרט $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2} \neq 0$ ולכן הטור מתבדר (ולכן הטור המקורי לא מתכנס בהחלט)

נמשיך לבדוק אם הטור מתכנס בתנאי: קל לראות ש $\frac{1}{(\log n)^2}$ מקיימת גם את תנאי משפט לייבניץ ולכן

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^2}$ מתכנס לפי משפט לייבניץ, כלומר זה טור מתכנס שאינו מתכנס בהחלט, לכן

לפי הגדרה זהו טור מתכנס בתנאי.

d. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

פתרון: דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט. נפעיל את מבחן קושי

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ לכן הטור מתכנס בהחלט.

e. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$

פתרון: $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n} = \cos(0) = 1 \neq 0$ לכן $\lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$ ולכן הטור מתבדר.

f. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

פתרון: דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. נסתכל על

הסכומים החלקיים של טור זה :

$$S_1=\log\left(\frac{2}{1}\right)=\log 2-\log 1=\log 2$$

$$S_2=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2=\log 3-\log 1=\log 3$$

$$S_3=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2+\log 4-\log 3=\log 4$$

$$\vdots$$

$$S_n=\log(n+1)$$

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ ולכן הטור מתבדר, כלומר הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

נמשיך, קל לוודא ש $\frac{n+1}{n}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל1 ולכן $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מונוטונית יורדת לאפס ולכן

לפי משפט לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מתכנס בתנאי.

6. תהי a_n סדרה המקיימת $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ $\forall n:$. הוכיחו/הפריכו: הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הפרכה: נשים לב שהתנאי $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ $\forall n:$ שקול פשוט לכך שהסדרה $|a_n|$ מונוטונית יורדת ממש, בפרט

היא יכולה לשאוף לכל מספר. למשל $a_n=L+\frac{1}{n}$ עבור $L>0$ (קל לוודא שסדרה זו מקיימת את תנאי

השאלה). אבל $a_n\to L\neq 0$ ולכן הטור בהכרח מתבדר.

חשוב! התנאי $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ $\forall n:$. לא גורר ש- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, שכן אצלנו, למשל, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{L}{L}=1$ כמו גם

בדוגמא $a_n=\frac{1}{n}$.

7. תהי a_n סדרה המקיימת $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le\alpha<1$ $\forall n:$. הוכיחו/הפריכו: הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה: נתון $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \alpha$ $\forall n:$ ולכן $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \alpha < 1$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}$. כלומר $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ לכן לפי משפט דלאמבר

הטור $\sum\left|a_n\right|$ מתכנס, כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

8. בדקו את התכנסות הטור: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$

(רמז: שימו סוגריים!)

הוכחה: נניח בשלילה שהטור מתכנס. לכן גם הטור עם סוגריים יתכנס. נוסיף סוגריים באופן הבא:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \dots = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \dots = \sum \frac{2}{n}$. הטור הנ"ל מתבדר,

בסתירה להנחה, ולכן גם הטור המקורי מתבדר.