אקסיומת החסם העליון

לפי (8): נתון $\varepsilon>0$. הוכח שקיים $q\in\mathbb{Q}$ כך
ש- $0<q<\varepsilon$.

1. הוכחה: מאקסיומת ארכימדס
יש $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon\cdot n>1$ $1<n\cdot\varepsilon$

2. אז $0<1/n<\varepsilon$

3. ניקח $q=1/n$.

לפי (9): הוכח שלכל קבוצה $\emptyset\neq A\subset\mathbb{Z}$
חסומה מלרע יש מינימום.

1. הוכחה: אם $A\subset\mathbb{N}$ אז אקסיומה
אומרת שיש ל- A מינימום.

2. נניח ש $A\not\subset\mathbb{N}$.

3. יודעים שיש ל- A חסם מלרע a.

4. נגדיר קבוצה חדשה:
$$B=-a+A:=\{-a+x:\ x\in A\}$$

5. B היא תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ ו- 0
חסם מלרע שלה.

6. אז ל- B יש מינימום b.

7. $b+a$ הוא מינימום של A.

לפי (10): נגון קטע (a,b). הוכח שקיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש- $a<q<b$.

1. הוכחה: יודעים שקיים $p\in\mathbb{Q}$ כך ש- $0<p<b-a$.
2. אז $p+a<b$.
3. ניקח $m:=\min\{n\in\mathbb{Z} : a<n\cdot p\}$
4. יהי $q:=m\cdot p$. אז $q\in\mathbb{Q}$.
5. ברור ש- $a<q$
6. צריכים להוכיח ש- $q<b$
7. יודעים ש- $q=m\cdot p>a$
   אבל $(m-1)\cdot p\leq a$
8. $q=m\cdot p=p+(m-1)\cdot p\leq p+a<b$
9. אז $q<b$.

לפי (15): הוכח את אי-שוויון ברנולי:
לכל $-1<a$, $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$.

1. הוכחה: ל- $n=0$ מקבלים:

$$(1+a)^0 = 1 = 1+0\cdot a$$

2. נניח של מספר n:

$$(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$$

3. האם $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot a$

4. $$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n\cdot(1+a) \geq$$

$$\geq (1+n\cdot a)(1+a) = 1+n\cdot a+a+n\cdot a^2$$

$$= 1+(n+1)\cdot a+n\cdot a^2 \geq 1+(n+1)\cdot a$$