בס"ד

ת.ז. :______________________________

**מבחן באינפי 4 , סמסטר קייץ מועד א תשע"א**

מרצים: ד"ר אלי בגנו, מר מיכאל קונטורוביץ.

משך המבחן: שלש שעות.

**הוראות הפעלה: ענה על 4 שאלות בדיוק. כל שאלה בדף שלה. אין לכתוב במחברת שמשמשת לטיוטה בלבד. בשאלה 6 יש לענות בכל סעיף "נכון" או "לא נכון" בלבד. בכל שאר השאלות יש לתת תשובות מנומקות ומפורטות.**

| | |
|---|---|
| שאלה 1 | |
| שאלה 2 | |
| שאלה 3 | |
| שאלה 4 | |
| שאלה 5 | |
| שאלה 6 | |

ציון:

**שאלה 1**

השתמש במשפט סטוקס כדי לחשב את האינטגרל $\int\int_S \overline{curlF}dudv$ כאשר $F(x,y,z)=(xz,yz,xy)$ ו $S$ הוא החלק של הספירה שמשוואתה $x^2+y^2+z^2=4$ שנמצא בתוך הגליל שמשוואתו $x^2+y^2=1$ ומעל מישור $x-y$.

**שאלה 2**

תהי $f:\Re\to\Re$ פונקציה רציפה . נסמן $P(x,y)=yf(x\cdot y),Q(x,y)=xf(x\cdot y)$

תהי $\gamma:[a,b]\to\Re^2$ מסילה בעלת אורך ששתי קצותיה על הצירים (כלומר כל אחת מהנקודות $\gamma(a)$ ו $\gamma(b)$ נמצאות על ציר x או על ציר y, יתכן שהנקודות על צירים שונים).

א. הראה שהשדה הוקטורי המוגדר על $\Re^2$ ע"י $F=(P,Q)$ הוא שדה משמר.

ב. חשבו את האינטגרל המסילתי $\int_\gamma Fdr$ .

**שאלה 3**

בהנתן פונקציה דיפרנציאבילית $f:\Re^n \to \Re$ , נגדיר את הלפלסיאן של $f$ להיות $\Delta f = div(\nabla f)$ .

א. הוכח כי $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\ 2}}$ .

ב. הוכח כי $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$ .

ג. חשב את האינטגרל $\int_\gamma Fdr$ כאשר $F(x,y) = (2y, -6x - \sin^2(y^3))$ ו $\gamma$ היא החצי התחתון של המעגל הנתון ע״י המשוואה $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 100$ . כיוון המסלול נגד השעון. (שימו לב לכך שהתחום (עדיין...) אינו סגור)

**שאלה 4**

א. הגדר תכולה של קבוצה ב $\Re^n$ .

ב. תהי $T:\Re^n \to \Re^n$ העתקה לינארית המוגדרת על הבסיס הסטנדרטי $T(e_1)=\sum_{i=1}^{n} ie_i$ ,

$T(e_2)=\sum_{i=2}^{n} ie_i$ וכך לכל $j=1..n$ $T(e_j)=\sum_{i=h}^{n} ie_i$ .

תהי $A=\left\{(x_1,...,x_n)\in\Re^n : |x_1|+|x_2|^2+|x_3|^3+...+|x_n|^n\le 1\right\}$ .

מצא את $\dfrac{Vol_n(T(A))}{Vol_n(A)}$ .

**שאלה 5**

א. נסמן ב C את החצי העליון של מעגל היחידה שנוסף אליו קטע הישר מהנקודה $(-1,0)$ אל הנקודה $(1,0)$. חלקיק נע לאורך C כך שתבנית הכח הפועל עליו היא $\alpha = 3y^2dx + 6xydy$. חשב את העבודה שנעשית ע"י הכח.

ב. חשב את אורכה של העקומה $\gamma:[0,2\pi] \to \Re^3$ $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$.

ג. תיל מונח על העקומה $\gamma:[0,2\pi] \to \Re^3$ המוגדרת ע"י $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ וצפיפותו נתונה ע"י הפונקציה $f:\Re^3 \to \Re$ המוגדרת ע"י $f(x,y,z) = x + y + z$.

**שאלה 6**

**לכל טענה, ענה נכון או לא נכון בלבד.**

א. יהי $S$ משטח דו מימדי. נגדיר את $N=(n_1,n_2,n_3)$ להיות שדה וקטורי שנותן בכל נקודה על S, נורמל יחידה למישור המשיק של S. אז $\int_S n_1dydz - n_2dxdz + n_3dxdy$ הוא השטח של המשטח, עד כדי סימן.

ב.אם $F:\Re^3 \to \Re^3$ אז $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ .

ג. אם $F:\Re^3 \to \Re^3$ שדה וקטורי גזיר ברציפות ואם $curl(F)=0$ אז השדה משמר.

ד. אם $\gamma,\delta$ מסילות אנטי שקולות ב $\Re^n$ ואם $f:\Re^n \to \Re$ פונקציה גזירה ברציפות אז $\int_\gamma fds = -\int_\delta fds$ (האינטגרל כאן הוא מסוג ראשון, כלומר לפי אורך מסילה).