

בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד ב'

11.9.2025, י"ח באלול התשפ"ה

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, דן פלורנטיין, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, נמרוד נדבורני, שירה ידעי, הראל רזנפלד, עידו פלדמן, בוריס גוליקוב, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.

- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) אם $C \setminus (A \cup B) = \emptyset$ אז $[(A \cap B) \cup C] \subseteq [A \cap (B \cup C)]$.

(ב) אם $A \cup C \subseteq B \cup C$ וגם $A \cap C \subseteq B \cap C$ אז $A \subseteq B$.

(ג) אם $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$ אז $A \cap C = B \cap C$.

2. (9 נקודות כל סעיף) תהא a_n סדרת מספרים ממשיים (כלומר $a_1, a_2, a_3, \dots$ מספרים ממשיים) המקיימת

$$0 < a_1 < 1$$

ובנוסף, לכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

(א) הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שלכל מספר $n \geq 1$ טבעי מתקיים $0 < a_n$.

(ב) הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שלכל מספר $n \geq 1$ טבעי מתקיים

$$0 > (-1)^n (a_{n+1} - a_n)$$

3. (8 נקודות כל סעיף) נגדיר יחס S על $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ כך

$$x_1 S x_2 \iff 0 < \frac{x_1}{x_2} \leq 1$$

(א) הוכיחו כי S יחס סדר (חלקי) על $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ב) הוכיחו או הפריכו: S יחס סדר לינארי.

(ג) מצאו את קבוצת האיברים המינימאליים וקבוצת האיברים המקסימאליים ב $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ עם היחס S .

4. (7 נקודות כל סעיף) שימו לב: במבחן הזה, 0 אינו מספר טבעי ($0 \notin \mathbb{N}$).

נגדיר יחס T על $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ על ידי הכלל

$$f T g \iff (f = g) \vee (\exists n \in \mathbb{N} : f^n(1) = 1 = g^n(1))$$

כאשר, חזקה n של פונקציה פירושה הרכבה הפונקציה על עצמה n פעמים (למשל $g^3(1)$ שווה ל $g \circ g \circ g(1)$). ענו על הבאים:

(א) הוכיחו כי T יחס שקילות על A .

(ב) מצאו את עוצמת מחלקת השקילות של הפונקציה הקבועה על 5. כלומר, נגדיר $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ על ידי הכלל $g(n) = 5$, מצאו את עוצמת מחלקת השקילות שלה - $|[g]_T|$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת.

(ג) קבעו את העוצמה של קבוצת המנה A/T . קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת.

5. (7 נקודות כל סעיף) הגדרה: תת קבוצה A של $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ תקרא **מטולטלת** אם

$$\forall x_1, x_2 \in A : \frac{x_1}{x_2} \in \mathbb{Q}$$

(א) תהא C שרשרת ביחס ההכלה, של קבוצות מטולטלות (כלומר לכל $A_1, A_2 \in C$ מתקיים $A_1 \subseteq A_2$ או $A_2 \subseteq A_1$). הוכיחו כי איחוד הקבוצות ב C ,

$$Y = \bigcup_{A \in C} A$$

היא קבוצה מטולטלת.

(ב) הוכיחו כי קיימת קבוצה מטולטלת S , כך שלכל $x \in \mathbb{R} \setminus S$ $0 \neq x$ קיים $a \in S$ המקיים $\frac{x}{a} \notin \mathbb{Q}$.

(ג) תהא S קבוצה מטולטלת מקסימאלית ביחס להכלה. מצאו את עוצמתה, $|S|$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, או $2^{\aleph}$ אחרת.