המרצה: ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות משקל כל שאלה: 22 נק'

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\cos(5x)\ln(1+7x)}{(1-e^{2x})\sqrt{1+4x}(\tan(6x))}$

נסדר לפי עקרון WIN

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{\cos(5x)\cdot\cos(6x)}{\sqrt{1+4x}}\cdot\frac{\ln(1+7x)}{7x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{6x}{\sin(6x)}\cdot\frac{-7\cdot 3}{6\cdot 2}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{7}{4}$$

ב. $\lim_{x\to\infty} x-x^2+\sqrt{x}-e^x$

נוציא גורם משמעותי

$$\lim_{x\to\infty} e^x\left(\underbrace{\frac{x}{e^x}-\frac{x^2}{e^x}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x}}_{\text{סדרי גודל}\ \to 0}-1\right)=\{\infty\cdot(-1)\}=-\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n$

נבדוק את הביטוי בבסיס החזקה

$$\frac{n^2+n+1}{n^2-1}=\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\to 1$$

לכן מותר להשתמש בכלל הe

$$\lim\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n=e^{\lim n\cdot\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}-1\right)}\overset{\text{למטה}}{=}e^1=e$$

$$\lim n\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}-1\right)=\lim n\cdot\frac{n^2+n+1-n^2+1}{n^2-1}=\lim\frac{n^2+2n}{n^2-1}=\lim\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}=1$$

2. חשבו את הביטויים הבאים:

א.

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx = \begin{Bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{Bmatrix} = \int te^t 2tdt = \int 2t^2e^t dt =$$

$$= \begin{Bmatrix} f' = e^t & g = 2t^2 \\ f = e^t & g' = 4t \end{Bmatrix} = 2t^2e^t - \int 4te^t dt = \begin{Bmatrix} f' = e^t & g = 4t \\ f = e^t & g' = 4 \end{Bmatrix} = 2t^2e^t - \left(4te^t - \int 4e^t dt\right) =$$

$$= 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t + C = 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)\left(\frac{k}{n}-2\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)\left(\frac{k}{n}-2\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)\left(\frac{k}{n}-2\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

כיוון שf רציפה בקטע $[0,1]$ לפי המשפט על סכומי רימן מתקיים כי גבול הסדרה הוא

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$1 = A(x-2) + B(x+1)$$

נציב $x = 2$

$$1 = 3B$$

$$B = \frac{1}{3}$$

נציב $x = -1$

$$1 = -3A$$

$$A = -\frac{1}{3}$$

ולכן

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|x-2| - \ln|x+1|]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln(1) - \ln(2) - \ln(2) + \ln(1)) = -\frac{2}{3}\ln(2)$$

.3

א. קרבו את $\sin(1)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$

נעזר כמובן בפיתוח טיילור של $f(x) = \sin(x)$ סביב אפס. ננחש כי $n = 3$ מספיק.

השגיאה היא

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1-0)^4 = \frac{\sin(c)}{4!}$$

ולכן $|R_3| \le \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ וזה לא מספיק.

ננחש $n = 4$ ונקבל

$$R_4 = \frac{\cos(c)}{5!}(1-0)^5$$

ואכן $|R_4| \le \frac{1}{5!}$

הערה: מתקיים כי $p_3(x) = p_4(x)$ ממילא כי המקדם של x^4 הוא אפס, אבל היינו צריכים להוכיח בעזרת ביטוי השגיאה כאשר $n = 4$

לכן הקירוב הוא

$$\sin(1) \approx p_4(1) = 1 - \frac{1^3}{3!} = \frac{5}{6}$$

הערה: כיוון שמדובר בפונקציה סטנדרטית ביותר לא השקעתי בפירוט פולינום הטיילור $p_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ וכך גם התלמידים במבחן יכלו ישירות לומר שזה הפולינום.

ב. הוכיחו כי הסדרה a_n המקיימת $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 2$ מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n + 2 = (a_n - 1)^2 + 1 \ge 1$$

משל.

4.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{x}{e^x} = -1$

נעביר אגף

$$\frac{x}{e^x} + 1 = 0$$

ונבנה פונקציה

$$h(x) = \frac{x}{e^x} + 1$$

נגזור

$$h'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

עבור $x > 1$ הנגזרת שלילית, ועבור $x < 1$ הנגזרת חיובית

לכן h עולה בתחום $(-\infty,1]$ ויורדת בתחום $[1,\infty)$

לכן המקסימום המוחלט שלה מתקבל ב$x=1$, והוא $h(1)=\frac{1}{e}+1>0$

נבדוק ערכים בקצוות

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}+1=\left\{\frac{-\infty}{0^+}+1\right\}=-\infty$$

לכן בתחום העלייה יש שורש אחד (הפונקציה מחליפה משלילי לחיובי, וחותכת את הציר לפי ערך הביניים. היא רציפה כצירוף של אלמנטריות בתחום הגדרתן).

$$\lim_{x\to\infty}\ \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}\ +1=1$$

סדרי גודל

ולכן אין חיתוך בתחום הירידה, שהרי הפונקציה אינה מגיעה אפילו לגובה $y=1$.

סה"כ חיתוך יחיד, ולכן פתרון יחיד למשוואה המקורית.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x=\frac{x+1}{e^x}$

נעביר אגף

$$x-\frac{x+1}{e^x}=0$$

ונבנה פונקציה

$$g(x)=x-\frac{x+1}{e^x}$$

$$g'(x)=1-\frac{e^x-(x+1)e^x}{e^{2x}}=1-\frac{1-(x+1)}{e^x}=1+\frac{x}{e^x}$$

אבל זו בדיוק הפונקציה $h(x)$ מסעיף קודם!

הוכחנו שהיא שלילית עד נקודת החיתוך עם ציר הx, ומאז היא חיובית לנצח (כי היא עלתה, ואז ירדה לא נמוך מ1).

כלומר g יורדת עד נק' מסוימת, ומאז עולה, ולכן יש לה לכל היותר שני חיתוכים עם הציר.

נחשב גבולות בקצוות:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x - \underbrace{\frac{x+1}{e^x}}_{\to 0} = \infty$$

סדרי גודל

$$\lim_{x\to-\infty} x - \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x - x - 1}{e^x} \overset{\text{למטה}}{=} \left\{\frac{0+\infty-1}{0^+}\right\} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left\{\frac{1}{-\infty}\right\} = 0$$

לבסוף נשים לב כי $g(0) = 0 - \frac{1}{e} < 0$

לכן לפי ערך הביניים (הפונקציה רציפה בכל הממשיים כצירוף של אלמנטריות בתחום הגדרתן)

הפונקציה מחליפה בין חיובי לשלילי בתחומים $(-\infty, 0], [0, \infty)$ ולכן אכן יש לה שני חיתוכים עם הציר.

סה"כ בדיוק שני חיתוכים, ולכן שני פתרונות למשוואה המקורית.

5. תהי f פונקציה המקיימת $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ונביט בחסם התחתון $m = \inf\{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם f רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$ אזי $m > 0$

הפרכה: הפונקציה $f(x) = e^x$ חיובית בכל הממשיים, אבל כיוון ש $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ נובע כי $m = 0$

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ אזי $m > 0$

הפרכה:

רוצים לבנות פונקציה ששואפת ל1 בקצוות ($\pm\infty$) אבל שווה לאפס ב$x = 0$ (אחר כך נהפוך את $x = 0$ לאי רציפות סליקה, ונסיים את ההפרכה).

הפונקציה $\frac{1}{x^2+1}$ עולה בתחום $(-\infty, 0]$ מאסימפטוטה אפס לגובה 1 ואז יורדת בתחום $[0, \infty)$ מגובה 1 עד לאסימפטוטה אפס. לכן $1 + \frac{1}{x^2+1}$ עולה מ1 עד 2, ואז יורדת ל1.

לכן $\frac{1}{\frac{1}{x^2+1}+1}$ יורדת מ1 עד חצי ואז עולה מחצי עד 1.

נוריד ממנה חצי, ונכפול ב2, ונקבל פונקציה שיורדת מ1 לאפס, ואז עולה מאפס ל1.

נביט בפונקציה

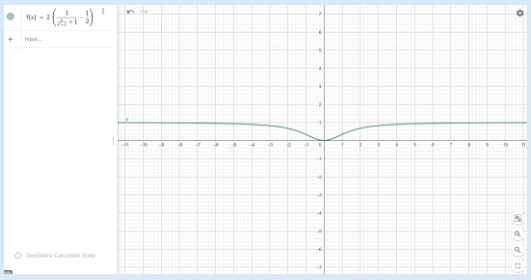
$$f(x)=\begin{cases}2\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2+1}+1}-\dfrac{1}{2}\right) & x\neq 0\\ 67 & x=0\end{cases}$$

מהבנייה הפונקציה חיובית בכל הממשיים, והגבולות באינסוף ומינוס אינסוף הם אחד.

אבל כיוון ש

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2\left(\frac{1}{1+1}-\frac{1}{2}\right)=0$$

נובע כי $m=0$.



הערה: מי שהגיע לשרטוט הזה בלי למצוא נוסחא מפורשת, אבל הדגיש את אי הרציפות הקפיצתית יזכה לרוב הנקודות.