

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 4

18 בנובמבר 2018

1. מצאו את הגבולות של הסדרות המרוכבות הבאות:

$$z_n = (0.5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6})^{2n} \quad (\text{א})$$

$$z_n = (1 - \frac{1}{n})^n \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \quad (\text{ב})$$

$$z_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{8n^2 + 2} - 2 \cdot \sqrt[n]{n}i \quad (\text{ג})$$

פתרון:

א. ראינו שכיון שהנורמה $|z| = 0.5 < 1$ אז מתקיים $z^n \rightarrow 0$. ולכן גם $z^{2n} = (z^n)^2 \rightarrow 0$.

ב. הגבול הוא: $\frac{1}{e} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$. הוכחה: נראה התכנסות רכיב רכיב: נתבונן בסדרה בהצגה הקרטזית: $z_n = (1 - \frac{1}{n})^n \cos \frac{\pi}{4} + (1 - \frac{1}{n})^n \sin \frac{\pi}{4}i = (1 - \frac{1}{n})^n \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}i)$. כלומר, יש כאן קבוע, $\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ כפול הסדרה $(1 - \frac{1}{n})^n$, וראינו שזה הקבוע כפול גבול הסדרה. ניזכר בקורס הקודם שמתקיים: $(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \frac{1}{e}$, ולכן בסה"כ נקבל: ולכן נקבל כי זה קבוע כפול מתכנסת.

$$z_n \rightarrow \frac{1}{e} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

ג. כאן נפתור לפי מה שראיתם בהרצאה שהסדרה $z_n = a_n + b_n i$ מתכנסת אם ורק אם הסדרות a_n, b_n מתכנסות. ואכן מתקיים: $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{8n^2 + 2} \rightarrow 0.25$, וכן $b_n = -2 \cdot \sqrt[n]{n} \rightarrow -2$, ולכן בסה"כ:

$$z_n \rightarrow 0.25 - 2i$$

2. הראו שהפונקציות הבאות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$ (בנקודות מהצורה $(x, 0), x \neq 0$)
אין צורך לבדוק):

א.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

ב.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} & x, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

ג.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

פתרון:

רציפות של פונקציה בנקודה מסויימת (x_0, y_0) הכוונה שלכל סדרות $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ מתקיים: $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| \rightarrow 0$, כאשר השאיפה האחרונה היא שאיפה בממשיים. כאן הנקודה המבוקשת לבדיקה היא $(x_0, y_0) = (0, 0)$. כיון שבשאלה הוגדר הערך של $f(0, 0)$, על מנת להראות שהפונקציה לא רציפה מספיק למצוא זוג אחד של סדרות $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ עבורן לא מתקיים: $|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| \rightarrow 0$. וזה מה שנעשה כאן:

א. אם נקבע את סדרת האינסוסים להיות תמיד אפס, כלומר, $x_n = 0$, וניקח למשל $y_n = \frac{1}{n}$, אז נקבל סדרת אפסים (כי המונה תמיד אפס), ולכן הגבול גם הוא אפס (הסדרה היא $f(x_n, y_n) = \frac{\sin 0}{\frac{1}{n}} = 0$). כיון שהגבול שונה מערך הפונקציה ב $(0, 0)$ נובע שהפונקציה לא רציפה. הערה חשובה: לא ניתן "לתקן" ע"י לקבוע $f(0, 0) = 0$ כי אם ניקח את הסדרות $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ נקבל $f(x_n, y_n) = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ לפי הידוע משנה שעברה, וכיון שיש שני גבולות שונים נובע שאין דרך "לתקן".

ב. אם ניקח את הסדרות $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{2}{n}$ נקבל את הסדרה $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2^4}{n^4}} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{16}{n^4}} = \frac{2}{1 + \frac{16}{n^2}} \rightarrow \frac{2}{1+16} = \frac{2}{17} \neq 0$. גם כאן לא יעזור תיקון אחר כי אם ניקח סדרות שוות $x_n = y_n$ (לא משנה מה הן בדיוק, למשל $\frac{1}{n}$) נקבל את הסדרה $f(x_n, y_n) = \frac{x_n}{x_n} - \frac{x_n}{x_n} = 0$. $1 - 1 = 0$, שהיא סדרת אפסים ולכן הגבול הוא אפס, וכיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

ג. אם ניקח סדרות מהצורה $x_n = y_n^2$ נקבל את הסדרה $f(x_n, y_n) = \frac{y_n^2 \cdot y_n^2}{y_n^4 + y_n^4} = \frac{y_n^4}{2y_n^4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$. סדרה קבועה שהגבול הוא חצי. שוב, לא ניתן לקנות כי אם נקבע את $x_n = 0$ וניקח סדרה למשל $y_n = \frac{1}{2}$ נקבל סדרת אפסים שהגבול הוא אפס. כיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

3. הראו שהפונקציות הבאות רציפות ב \mathbb{R}^2 (כלומר, רציפות בכל נקודה):

.א.

$$f(x, y) = \begin{cases} y \cdot \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

.ב.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

. $\forall x : |\sin x| \leq |x|$: היעזרו בעובדה הבאה:

פתרון:

א. כאן צריך להשתמש שמכפלת פונקציות רציפות היא רציפה. הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ רציפה כמובן, וכמו כן הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ רציפה. לכן, המכפלה רציפה. המכפלה זה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} y \cdot \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 \cdot 1 & x = 0 \end{cases}$, ולכן הפונקציה רציפה.

אפשר גם לפי הגדרה. לכל שתי סדרות x_n, y_n נקבל: $|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| = |y_n \cdot \frac{\sin x_n}{x_n}| = |y_n| \cdot |\frac{\sin x_n}{x_n}|$ לאחד, ולכן הגבול הוא אפס, כדרוש.

ב. לפי הגדרה צריך להראות שלכל שתי סדרות x_n, y_n מתקיים: $|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| \rightarrow 0$. נראה זאת:

$$|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| = \left| \frac{\sin(x_n y_n)}{x_n} \right| = \frac{|\sin(x_n y_n)|}{|x_n|}$$

עכשיו נשתמש ברמז שכתוב: תמיד מתקיים $|\sin x| \leq |x|$, ולכן אצלנו נקבל $|\sin(xy)| \leq |xy|$ ונוכל להמשיך:

$$\frac{|\sin(x_n y_n)|}{|x_n|} \leq \frac{|x_n y_n|}{|x_n|} = \frac{|x_n| \cdot |y_n|}{|x_n|} = |y_n| \rightarrow 0$$

בהצלחה!