אינפי ב' - תרגול בר

<u>הגדרה:</u> סדרה אינסופית היא פונ' מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{R}$. כלומר לכל מס' טבעי מתאימים מס' ממשי. (נסמן $f(n)$ בד"כ ב- a_n.

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, \ldots$$

<u>דוגמא:</u> $a_n = n$ $1, 2, 3, \ldots$

$a_n = (-2)^n$ $-2, 4, -8, \ldots$

<u>הגדרה:</u> נאמר ש- $\langle a_n \rangle$ מתכנסת ל- L, ונסמן $\lim a_n = L$ או $a_n \to L$ אם לכל N אינסופי שלם $a_N \approx L$

אם לכל N אינסופי שלם a_N אינסופי חיובי, נסמן $\lim a_n = \infty$ ונאמר שהסדרה מתבדרת ל- ∞. (כנ"ל לגבי $-\infty$)

אם הסדרה לא מתכנסת לגבול L, ולא מתבדרת לאינסוף או למינוס אינסוף, נאמר שהסדרה מתבדרת.

<u>תרגילים:</u> חשב את הגבולות של הסדרות הבאות (במידה והם קיימים)

1. $\langle \sin(n!) \frac{1}{n} \rangle$

<u>פתרון:</u> $\underbrace{\sin(N!)}_{\text{סופי}} \underbrace{\frac{1}{N}}_{\text{אינפ'}} \approx 0$

2. $\sqrt{n^2+n} - n$

<u>פתרון:</u> $= \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n}$

$$= \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

כעת, אם נציב N אינסופי

$$\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{N}}_{\text{אינפי'}}} + 1} \approx 1$$

3. $\langle n^2 (-1)^n \rangle$

נציב N אינסופי שלם זוגי

$(-1)^N N^2 = 1 \cdot N^2 = N^2 \to$ אינסופי חיובי

בס"ד

נקח N אינסופי שלם אי-זוגי

אינסוף שלילי! $(-1)^N N^2 = -N^2$

לכן הסדרה מתבדרת.

ד. $\left\langle \frac{n^2+1}{n^3+4} \right\rangle$

<u>פתרון:</u> נקח N אינסופי שלם

$$\frac{N^2+1}{N^3+4} = \frac{1+\frac{1}{N^2}}{N+\frac{4}{N^2}} \approx \frac{1}{N} \approx 0$$

<u>אריתמטיקה של גבולות:</u>

אם $a_n \to a$, $b_n \to b$

1. $a_n + b_n \to a+b$
2. $a_n b_n \to ab$
3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ כאשר $b \neq 0$

<u>תרגיל:</u> 1. אם $a_n \to L \neq 0$ (כלומר: a_n מתכנסת לגבול שונה מ-0) האם גם $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ מתכנסת?

<u>פתרון:</u> כן. נקח סדרה חדשה: $a_{n+1} = b_n$

נקח N אינסופי שלם ב-b_N.

$st\, b_N = st\, a_{N+1}$

בגלל ש-a_n מתכנסת, לכל מס' אינסופי שלם שנקח בה, $st\, a_{N+1}$ קיים וקבוע, בפרט, אם נקח בה $N+1$. לכן $st\, a_{N+1}$ קיים וקבוע, כלומר b_N מתכנסת (ולא ל-0)

לכן $\frac{a_n}{b_n}$ מתכנסת. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$

2. אם $\langle a_n \rangle$ סדרה מתבדרת. האם $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ מתבדרת?

<u>פתרון:</u> לא בהכרח. לדוגמא: $a_n = (-1)^n$ - מתבדרת. אבל

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1$$

סדרה קבועה ולכן מתכנסת.

<u>גבול ידוע:</u> $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ כאשר $a_n \to \infty$

<u>תרגיל:</u> חשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

פתרון:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} =$$

$$\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{-(n-1)n}{n-1}} = \left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{-n}{n-1}}$$

נשים לב כי $n-1\to\infty$ ולכן:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$$

כמו כן, $\frac{-n}{n-1}\to -1$

ובגלל ש- e^x פו' רציפה, לכן:

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{-n}{n-1}} = e^{\lim\frac{-n}{n-1}} = e^{-1}$$

לסיכום: $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

2. $\lim\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$

פתרון:

$$\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \left(\frac{n^2-3+1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} =$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{\frac{(n^2-3)(4n^2-1)}{n^2-3}} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^{\frac{4n^2-1}{n^2-3}} =$$

$$\lim\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = e^{\lim\frac{4n^2-1}{n^2-3}} = e^4$$

כי $\lim\frac{4n^2-1}{n^2-3} = 4$

3. $\lim\left(1+\frac{c}{a_n}\right)^{a_n}$, $c>0$ כאשר $a_n\to\infty$

פתרון: $\left(1+\frac{c}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{c}}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{c}}\right)^{\frac{a_n}{c}\cdot c} =$

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{c}}\right)^{\frac{a_n}{c}}\right]^c$$

נשים לב כי מאחר שאם $a_n\to\infty$ אז $\frac{a_n}{c}\to\infty$ ולכן:

$$\lim\left(1+\frac{c}{a_n}\right)^{a_n} = e^c$$

עוד גבולות ידועים:

1. $\lim a^n=\infty$ $a>1$
2. $\lim a^n=0$ $0<a<1$
3. $\lim \ln(n)=\infty$
4. $\lim n^c=\infty$ $c>0$
5. $\lim n!=\infty$
6. $\lim\frac{n!}{b^n}=\infty$ $b>1$

8. $\lim \frac{n^c}{\ln(n)} = \infty$ עם $c>0$

תרגיל: חשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim \frac{3^{n-1}}{2^n}$

פתרון: $\lim \frac{3^{n-1}}{2^n} = \lim \frac{1}{3} \cdot \frac{3^n}{2^n} =$

$\lim \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$

2. $\lim \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$

פתרון: $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} = \frac{n!(n+1) - n!}{n!(n+1) + n!} = \frac{n+1-1}{n+1+1} =$

$\frac{n}{n+2} \longrightarrow 1$

3. $n! - 10^n$

פתרון: $n! - 10^n = \frac{n! - 10^n}{10^n} \cdot 10^n =$

$\left(\frac{n!}{10^n} - 1\right) 10^n \to \infty$

$\frac{n!}{10^n} - 1 \to \infty, \quad 10^n \to \infty$

4. $\sqrt[n!]{n}$

פתרון: $\sqrt[n!]{n} = n^{\frac{1}{n!}} = e^{\ln n^{\frac{1}{n!}}} = e^{\frac{1}{n!} \cdot \ln(n)} =$

$e^{\frac{\ln(n)}{n!}}$

נחשב $\lim \frac{\ln(n)}{n!}$

$\lim \frac{\ln(n)}{n!} = \lim \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{n}{n!} = \lim \frac{\ln n}{n} \cdot \lim \frac{n}{n!} =$

$\lim \frac{\ln n}{n} \cdot \lim \frac{1}{(n-1)!} = 0 \cdot 0$

לכן $\lim \sqrt[n!]{n} = e^0 = 1$

הערה: ידוע ש- $\lim \frac{n}{\ln n} = \infty$ לכן $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$

5. $\ln(\ln n)$

פתרון: ידוע e $\ln H$ לכל H אינסופי חיובי

הוא אינסופי חיובי, לכן $\ln(\ln(n))$ לא חסום

$\ln(H)$ עבור H אינסופי חיובי כלשהו, שלה מס' אינסופי

חיובי

הערה: אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אז $\lim_{n\to\infty} f(n)=L$, כי $f(n)\approx L$

לכל איברי הסדרה (כמעט) החל מאינדקס מסוים.

6. $\lim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$

נסתכל על הפונ' $\frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\ln x)} \underset{\text{לופיטל}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

לכן $\lim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}=\infty$

הגדרת N,ϵ של גבול

נאמר ש- $\lim a_n=L$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים n_0 טבעי כך שלכל

$n>n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\epsilon$.

נאמר ש $\lim a_n=\infty$ אם לכל A ממשי קיים n_0 טבעי, כך

שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>A$

תרגיל 1. הוכיחו באמצעות הגדרת N,ϵ את הגבול: $\frac{1}{n^2}\xrightarrow{\infty}$.

פתרון: יהי $\epsilon>0$ נתון. אנחנו רוצים ש- $|\frac{1}{n^2}-0|<\epsilon \Leftarrow |\frac{1}{n^2}|<\epsilon$

$\Leftarrow \frac{1}{n^2}<\epsilon \Leftarrow n^2>\frac{1}{\epsilon} \Leftarrow \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}<n$. נבחר $n_0=\lceil\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\rceil$.

2. הוכיחו באמצעות הגדרת N,ϵ שאם $a_n\xrightarrow{}\infty$ אז

$\frac{1}{a_n}\to 0$

פתרון: ידוע שלכל A קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>A$.

כעת, יהי $\epsilon>0$ נתון. אנחנו רוצים ש- $|\frac{1}{a_n}-0|<\epsilon \Leftarrow |\frac{1}{a_n}|<\epsilon \Leftarrow$

$\frac{1}{\epsilon}<|a_n|$. נבחר $A=\frac{1}{\epsilon}$. יהי n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>A \Leftarrow$

$A<|a_n| \Leftarrow \frac{1}{\epsilon}<|a_n|$.

הגדרה: סדרה נקראת סדרת קושי אם לכל N,M אינסופיים

מתקיים $a_N\approx a_M$

תרגיל: הראו שהסדרה הבאה היא סדרת קושי:

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$$

<u>פתרון:</u> $a_n-a_m=\frac{n+1}{n}-\frac{m+1}{m}=\frac{nm+m-mn-n}{mn}=$

$\frac{m-n}{mn}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=$ אינפי' - אינפי' = אינפי'

לכן $a_n \simeq a_m$

<u>תרגיל:</u> תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה שמקיימת $|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{2^n}$.

הוכיחו ש- $\langle a_n \rangle$ ~~...~~ סדרת קושי.

<u>פתרון:</u> אנחנו רוצים להסתכל על a_n-a_m.

$$|a_n-a_m|=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\dots+a_{m+1}-a_m|\le$$

$$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\dots+|a_{m+1}-a_m|\le$$

$$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{1}{2^{n-m}}+\dots+1\right]=$$

$$\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2^{n-m}}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2^m}\left[1-\frac{1}{2^{n-m}}\right]=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}$$

כעת, אם ניקח n,m אינסופיים שלמים:

$|a_n-a_m|\le\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}=$ אינפי' - אינפי' = אינפי'

לכן a_n-a_m אינפי'.

<u>תרגיל:</u> הראו שהסדרה הבאה אינה סדרת קושי:

$$a_n=1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}$$

<u>פתרון:</u> $a_m-a_n=\frac{1}{2n+1}+\dots+\frac{1}{2m-1}\ge$

$$\frac{m-n}{2m-1}$$

לכן, לכל n, m אינסופיים שלמים:

$$a_m-a_n\ge\frac{m-n}{2m-1}$$

כעת, אם ניקח $m=2n$

$$a_{2n}-a_n\ge\frac{2n-n}{4n-1}=\frac{n}{4n-1}\simeq\frac{1}{4}$$

$$a_{2n}-a_n\ge\frac{1}{4}$$

לכן $a_{2n}\not\simeq a_n$

<u>משפט:</u> סדרה מתכנסת אמ"ם היא סדרת קושי.