

אלגברה לינארית תשפ"ה

סמסטר ב מועד ב

כ"ג באב ה'תשפ"ה, 17/08/2025

הוראות

- מרצים: אריאל ויצמן ותומר באואר.
- מתרגל: גל כהן.
- יש לענות על כל שאלות הבחינה. סך הניקוד הוא 104 נק', לא ניתן לקבל ציון מעל 100.
- אין חומר עזר, מותר מחשבון.
- זמן הבחינה: 3 שעות.
- המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
- יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

שאלות

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$ (5 נק' לכל סעיף):

- $N(A)$
- $C(A)$
- $N(A) + C(A)$
- $N(A) \cap C(A)$

(ב) (10 נק') האם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת: $\text{rank}(B^2) < \text{rank}(B)$?

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

$$\text{i. } T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii. } \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ker T.$$

(ב) קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ על.

(ג) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים: אם n טבעי אי-זוגי ו- A מטריצה אנטי-סימטרית (כלומר, $A^t = -A$), אז A לא הפיכה.

(ד) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מתקיים: אם בצורה המדורגת של A יש שורת אפסים אז למערכת $Ax = 0$ יש יותר מפתרון אחד.

(ה) הקבוצה

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : A^t = \alpha A\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$$

היא תת-מרחב של $\mathbb{R}^{n \times n}$.

3. (12 נק') עבור אילו ערכים של $a, b \in \mathbb{R}$ המטריצה A הבאה לכסינה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & ab \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

4. נתבונן במרחב $\mathbb{R}^3$. נתונה הפונקציה:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2$$

(א) (10 נק') הוכיחו שזוהי מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^3$.

(ב) (12 נק') נתבונן בתת-המרחב $W = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. עבור הוקטור

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את ההיטל $\pi_W(v)$ ביחס למכפלה הפנימית מסעיף א.

בהצלחה!