הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 4

ריכוז מידה

אי-שוויון מרקוב: לכל $X \geq 0$,

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

אי-שוויון צ'בישב: לכל X,

$$\Pr(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

אי-שוויון הופדינג: (63)

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת כך ש- $|X_i| \leq 1$ ו- $\mathbb{E}[X_i]=0$. אז לכל $\lambda \geq 0$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \lambda\right) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}.$$

דוגמה:

$X \sim Bin(n,p)$. $\quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\quad X_i \sim Ber(p)$,

$$P(X - np \geq \lambda) = P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - p) \geq \lambda\right) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$$

תרגיל:

יהי $X_n = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$ ממבתשה. $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ - הילוך מקרי על $\mathbb{Z}$.

$S_0 = 0$

$$\mathbb{E}[S_n] = 0, \quad Var(S_n) = n \cdot Var(X_1) = n$$

הוכיחו ש- $S_n > 2\sqrt{n \log n}$ מספר סופי של פעמים (כמעט תמיד).

הוכחה:

באמצעות אי-שוויון הופדינג,

$$P(S_n > 2\sqrt{n\log n}) \le e^{-\frac{(2\sqrt{n\log n})^2}{2n}} = e^{-\frac{4n\log n}{2n}} = e^{-2\log n} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, לכן $S_n > 2\sqrt{n\log n}$ מספר סופי של פעמים (כמעט תמיד) $\square$

משפט: (חוק הלוגריתם החוזר)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

הגדרה:

יהי X משתנה מקרי. __הפונקציה יוצרת המומנטים__ שלו היא

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

(בכל נקודה שבה היא מוגדרת).

הערות:

א. $M_X(t)$ לא תמיד מוגדרת. $M_X(0)=1$.

ב. $M'_X(0) = \mathbb{E}[X]$. (בהנחה שהיא גזירה)

ג. הפונקציה יוצרת המומנטים קובעת את ההתפלגות.

דוגמה:

$X \sim Geo(p)$ $\quad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\,e^{tk} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}((1-p)e^t)^k =$$

$$= \frac{p}{1-p}\cdot(1-p)e^t\cdot\frac{1}{1-(1-p)e^t} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

מוגדר כל עוד $(1-p)e^t<1$
$t<-\ln(1-p)$

אי-שוויון צ'רנוף:

יהי X מ"מ. לכל $t>0$,

$$P(X\geq a)=P(e^{tX}\geq e^{ta})\underset{\text{מרקוב}}{\leq}\frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}=\frac{M_X(t)}{e^{ta}}$$

דוגמה:

$X\sim Geo(p)$. לכל $t>0$,

$$P(X\geq a)\leq\frac{M_X(t)}{e^{ta}}=\frac{pe^t}{e^{ta}(1-(1-p)e^t)}$$

אפשר לגזור ולמצוא את ה-t האופטימלי.

משפט: (אי-שוויון צ'רנוף)

$$V=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$$

יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת, $|X_i|\leq 1$, $\mathbb{E}[X_i]=0$. אז לכל $\lambda\geq 0$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\geq\lambda\right)\leq\max\left\{e^{-\frac{\lambda^2}{4V}},e^{-\frac{\lambda}{2}}\right\}$$

אם $\lambda<2V$ מקבלים את החסם השמאלי.

דוגמה:

$X\sim Bin(n,p)$. כמו $Var(X)=np(1-p)$, חסם

$$P(X-np\geq\lambda)\leq\max\left\{e^{-\frac{\lambda^2}{4np(1-p)}},e^{-\frac{\lambda}{2}}\right\}$$

אם $\lambda<2np(1-p)$, שיפרנו את הופדינג. אכן,

$$e^{-\frac{\lambda^2}{4np(1-p)}}\leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}\iff\frac{\cancel{\lambda^2}}{4\cancel{n}p(1-p)}\geq\frac{\cancel{\lambda^2}}{2\cancel{n}}\iff 1\geq 2p(1-p)\iff 2p^2-2p+1\geq 0$$

וזה נכון לכל p.

סוגי התכנסויות

הגדרה:

יהיו $X, X_1, X_2, \dots$ מ"מ.

א. אומרים ש-X_n מתכנסת בהתפלגות ל-X (convergence in distribution), ומסמנים $X_n \xrightarrow{d} X$, אם $F_{X_n}(t) \longrightarrow F_X(t)$ בכל נקודת רציפות של F_X.

ב. אומרים ש-X_n מתכנסת בהסתברות ל-X (convergence in probability), ומסמנים $X_n \xrightarrow{P} X$, אם לכל $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ג. אומרים ש-X_n מתכנסת כמעט תמיד ל-X (convergence almost surely), ומסמנים $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, אם $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$.

טענה:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{d} X.$$

טענה:

אם $X_n \xrightarrow{P} X$ אז קיימת תת-סדרה $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$.

תרגיל:

תני דוגמה לכך שהגרירות ההפוכות בטענה הנ"ל אינן נכונות.

פתרון:

$$\boxed{X_n \xrightarrow{P} X \;\not\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{a.s.} X}$$

$$X_{2^n+k} = 1_{[2^{-n}k,\, 2^{-n}(k+1)]} \qquad 1 \leq k \leq 2^n - 1$$

$$P(|X_{2^n+k}| \geq \varepsilon) \leq 2^{-n} \longrightarrow 0$$

אבל $X_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$ כי בכל נקודה הערך הוא 1 אינסוף פעמים.

$$\boxed{X_n \xrightarrow{p} X \not\Leftarrow X_n \xrightarrow{d} X}$$

נגדיר על $[0,1]$ את המשתנים הבאים:

$$X_{2n}(\omega)=\omega, \qquad X_{2n-1}(\omega)=1-\omega$$

כל X_n מתפלג אחיד, אבל מצד שני: אם X_n הייתה מתכנסת בהסתברות למשהו X כלשהו, אז הייתה לה תת סדרה שמתכנסת a.s. ל-X. אפשר להפעיל את הטיעון הזה על X_{2n} ולקבל $X(\omega)=\omega$, ומצד שני הטיעון הזה על X_{2n-1} יראה ש- $X(\omega)=1-\omega$, בסתירה.