מבוא לטופולוגיה – תרגיל 8 (קצר בגלל הבוחן)

תזכורת. קבוצת קנטור

סימונים.

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$, $I=[a,b]$. נסמן: $l(I)=[a,a+\frac{1}{3}(b-a)]$

$r(I)=[a+\frac{1}{3}(b-a),a+\frac{2}{3}(b-a)]$

נבנה באינדוקציה סדרת תת-קבוצות ב- $\mathbb{R}$, כלומר:

לכל $n\geq 0$ נבנה 2^n קטעים סגורים I_i^n ותת-קבוצה $K_n\subset\mathbb{R}$ כך ש-

$$\boldsymbol{K_n=\dot{\bigcup_{i=1}^{2^n}}I_i^n}$$

כאשר:

בסיס $(n=0)$: $K_0=I_1^0=[0,1]$

שלב לדוגמה $(n=1)$: $K_1=I_1^1\dot{\cup}I_2^1$; $I_1^1=l(I_1^0),\ I_2^1=r(I_1^0)$

צעד האינדוקציה. יהיו ל-$n\geq 0$ בנוים קטעים סגורים I_i^n $(1\leq i\leq 2^n)$ ותת-קבוצה $K_n\subset\mathbb{R}$ כך ש-

$$\boldsymbol{K_n=\dot{\bigcup_{i=1}^{2^n}}I_i^n}$$

אזי נסמן לכל i: $\boldsymbol{I_{2i-1}^{n+1}=l(I_i^n),\quad I_{2i}^{n+1}=r(I_i^n)}$

ונגדיר:

$$\boldsymbol{K_{n+1}=\dot{\bigcup_{i=1}^{2^{n+1}}}I_i^{n+1}}$$

(סוף בניה)==

קל לראות ש- $\boldsymbol{K_0\supset K_1\supset\cdots}$.

הגדרה. *קבוצת קנטור* זה החיתוך:

$$\boldsymbol{K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n}$$

נסמן ב-$length(\boldsymbol{I})$ האורך של הקטע $\boldsymbol{I}$.

נסמן ב-$L_\Sigma(K_n)$ את סכום אורכי הקטעים $\boldsymbol{I_i^n}$ המוכלים ב-K_n.

<u>ראינו בכיתה:</u>

$$length(\boldsymbol{I_i^n}) = \frac{1}{3^n}$$

$$L_\Sigma(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

<u>הוכחנו בכיתה את התכונות:</u>

א) $K \neq \emptyset$

ב) K קבוצה סגורה

ג) K קבוצה קומפקטית.

ד) K אינה מכילה שום קטע.

<u>שאלה 1</u>

<u>הוכיכו</u> תכונות הבאות של קבוצת קנטור:

ה) K^c צפוף ב-$[0,1]$ (המשלים ביחס למרחב $[0,1]$)

ו) $K^\circ = \emptyset$ (הפנים ביחס למרחב $[0,1]$)

ז) רכיב קשירות וקשירות מסילתית של K הוא נקודון.

<u>שאלה 2</u>

<u>הגדרה 1.</u> קטע $[a,b]$ ב-$\mathbb{R}^n$ זאת קבוצה:

$$[a,b] = \{a + t(b-a) | t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$$

או בקואורדינטות:

$$[a,b] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i = a_i + t(b_i - a_i), 1 \leq i \leq n\}$$

הגדרה 2 הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *קמורה* אם :

$$x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subseteq A$$

הוכיחו שכל קבוצה קמורה ב-$\mathbb{R}^n$ קשירה מסילתית.

תרגיל 3

הגדרה 3. הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *תחום כוכבי* ב-$\mathbb{R}^n$ (*עם המרכז בנקודה* $o \in A$) אם לכל $x \in A$ מתקיים $[o, x] \subseteq A$.

הוכיחו שכל תחום כוכבי ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה קשירה מסילתית.