מרחב מטרי

הגדרה

מרחב מטרי הוא קבוצה M ופונקציה $d:M\times M\to[0,\infty)$ כך שמתקיים:

1. לכל $x,y\in M$, $d(x,y)=0$ אם"ם $x=y$(כלומר לכל $x\in M$ $d(x,x)=0$ ואם $x\neq y$ אז $d(x,y)\neq 0$)
2. לכל $x,y\in M$, $d(x,y)=d(y,x)$
3. לכל $x,y,z\in M$, $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (אי שוויון המשולש)

הפונקציה d נקראת "מטריקה על M".

דוגמאות

1. $\mathbb{R}$ עם המטריקה $d(x,y):=|x-y|$.
2. $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d((x_1,...x_n),(y_1,...y_n)):=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. זאת נקראת "המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$", (מסומנת d^2)
3. $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d((x_1,...x_n),(y_1,...y_n))=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$(מסומנת d^∞).
4. תהי M קבוצה כלשהי. נגדיר על M את המטריקה $d(x,y):=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$. נוכיח שזו מטריקה:

   שני התנאים הראשונים מתקיימים אוטומטית מההגדרה. נוכיח שאי שוויון המשולש מתקיים:

$$d(x,z)\overset{?}{\leq}d(x,y)+d(y,z)$$

- אם $x\neq y,y\neq z$ אז נקבל בצד ימין 2, ומכיוון שבצד שמאל יכול להיות מקסימום 1. זה מתקיים.
- אם $x\neq y$ או $y\neq z$, אז נקבל בצד ימין 1, וזה בכל מקרה גדול שווה לצד שמאל.
- אם $x=y$ ו$y=z$ אז $x=y=z$ כלומר $x=z$, ולכן נקבל 0 בשני הצדדים.

המטריקה הזאת נקראת "המטריקה הדיסקרטית על M"

הגדרה

יהי (M,d) מרחב מטרי.

תהי $A\subseteq M$ תת קבוצה כלשהי. אזי הצמצום של d ל$A\times A$ מהווה מטריקה על A.

המטריקה הזו על A נקראת "המטריקה המושרה על A מM", ועם מטריקה זו A נקרא תת מרחב מטרי של M.

דוגמאות

1. $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
2. $S^{n}=\left\{ \left(x_{1},...x_{n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i}^{2}=1\right\}$, S^{n} תת מרחב של $\mathbb{R}^{n+1}$.
   - $S^{1}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ הוא מעגל היחידה.
   - $S^{2}\subseteq\mathbb{R}^{3}$ הוא כדור עם רדיוס 1.
   - $S^{n}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ נקראת "הספירה הn מימדית"

נשים לב שאמנם S^{n} נמצא במרחב $n+1$ מימדי - אבל אפשר להסתכל עליו כעל מרחב n מימדי.

התכנסות של סדרות

הגדרה

סדרה בM היא פונקציה $a:\mathbb{N}\rightarrow M$.

נהוג לסמן את $a\left(n\right)$ כך: a_{n}.

הגדרה

יהי (M,d) מרחב מטרי. תהי a_{n} סדרה בM, ותהי $b\in M$. אנו נאמר שהסדרה $\left\{ a_{n}\right\}$ מתכנסת לb, אם לכל $\epsilon>0$ יש n_{0} כך שלכל $n\geq n_{0}$ מתקיים $d\left(a_{n},b\right)<\epsilon$.

סימונים

$$a_{n}\rightarrow b$$

$$a_{n}\xrightarrow{n\rightarrow\infty}b$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}a_{n}=b$$

טענה

אם קיים גבול לסדרה $\{a_n\}$אז הוא יחיד.

הוכחה

נניח בשלילה שלסדרה $\{a_n\}$יש שני גבולות שונים $b \neq c$. ניקח $\epsilon = \frac{1}{2}d\left(b,c\right)$. $\epsilon > 0$ כי $b \neq c$.

- כיוון שb $a_n \to$ קיים n_0 כך ש$d\left(a_n,b\right) < \epsilon$ לכל $n \geq n_0$.
- כיוון שc $a_n \to$ קיים n_1 כך ש$d\left(a_n,c\right) < \epsilon$ לכל $n \geq n_1$.

ניקח $N = \max\left(n_0,n_1\right)$, אזי

$$d\left(a_N,b\right) < \epsilon$$

$$d\left(a_N,c\right) < \epsilon$$

מאי שוויון המשולש נקבל

$$d\left(b,c\right) \leq d\left(b,a_N\right) + d\left(a_N,c\right) < \epsilon + \epsilon = d\left(b,c\right)$$

וקיבלנו סתירה!

טענה

$a_n \to b$ אם"ם $d\left(a_n,b\right) \to 0$

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח $a_n \to b$ וצ"ל $d\left(a_n,b\right) \to 0$. יהא נתון $\epsilon > 0$. מהתכנסות a_n לb קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $d\left(a_n,b\right) < \epsilon$. עבור אותו n_0 מתקיים שלכל $n \geq n_0$, $\left|d\left(a_n,b\right) - 0\right| < \epsilon$.

$\Rightarrow$ נניח $d\left(a_m,b\right) \to 0$ וצ"ל $a_n \to b$. בהינתן $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $\left|d\left(a_n,b\right) - 0\right| < \epsilon$, כלומר $d\left(a_n,b\right) < \epsilon$.

דוגמאות לתכונות של $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית שאינן נכונות במרחבים מטריים באופן כללי

דוגמה 1 - סדרת קושי

הגדרה יהי $\left(M,d\right)$ מרחב מטרי. סדרה $\{a_n\}$ בM נקראת סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n,m \geq n_0$ מתקיים $d\left(a_n,a_m\right)$

טענה כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

הוכחה תהי $\{a_n\}$ סדרה המתכנסת ל-b. יהא נתון $\epsilon > 0$. מהגדרת ההתכנסות עם $\frac{\epsilon}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $d(a_n, b) < \frac{\epsilon}{2}$. לכן לכל $n, m \geq 0$

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, b) + d(a_n, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ב-$\mathbb{R}^n$ הוכחנו גם את הטענה ההפוכה: כל סדרת קושי מתכנסת. זה **אינו** נכון במרחבים מטריים באופן כללי.

דוגמאות:

1. $\mathbb{Q}$ת

2. $(0,1)$. הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ היא סדרת קושי ב-$(0,1)$, אך היא איננה מתכנסת.

שם(הגדרה)

מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנס נקרא "מרחב מטרי שלם".

דוגמה 2 - סדרה חסומה

סדרה $\{a_n\}$ נקראת חסומה אם קיים $b \in M$ וקיים $R > 0$ כך ש-$d(a_n, b) \leq R$ לכל n.

ב-$\mathbb{R}^n$ לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

במרחב מטרי דיסקרטי, נבחר סדרה שבה כל איבריה שונים, ולכן המרחק בין כל שני איברים הוא 1 - לכן הסדרה חסומה. אבל גם בכל תת סדרה שלה המרחק בין שני איברים הוא 1, ולכן היא לא יכולה להיות סדרת קושי, ולכן היא לא מתכנסת.

סימון

יהי (M,d) מרחב מטרי, $a \in M$, $r > 0$. נסמן:

$$B(a,r) := \{x \in M | d(x,a) < r\}$$

$B(a,r)$ נקראת "הכדור הפתוח סביב a ברדיוס r".

כעת ניתן לכתוב: $x_n \to a$ אם לכל $\epsilon > 0$ יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(a, \epsilon)$.

התכנסות של פונציות

הגדרה

יהיו (M,d), (N,ρ) שני מרחבים מטריים. תהי $N: M \to N$ פונקציה, ותהי $a \in M$.

נאמר שf רציפה בa אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in M$ אם $d(x,a) < \delta$ אז $\rho(f(x), f(a)) < \epsilon$.

ובלשון כדורים: נאמר שf רציפה בa אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש

$$f\left(B^M(a,\delta)\right) \subseteq B^N(f(a), \epsilon)$$

אם $f : M \to N$ רציפה בכל נקודה $a \in M$, אז אנו קוראים לf רציפה.

משפט

יהיו (M,d), (N,ρ) מרחבים מטריים, $f : M \to N$, $a \in M$. אזי f רציפה בa אם"ם לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ שמתכנסת לa מתקיים ש$f(x_n) \to f(a)$

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח f רציפה בa, ותהי x_n סדרה בM המתכנסת לa. צ"ל $f(x_n) \to f(a)$.
יהא נתון $\epsilon > 0$. f רציפה בa, לכן יש $\delta > 0$ כך ש$f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a), c)$.
$x_n \to a$, לכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(a,\delta)$, ולכן עבור $n \geq n_0$ יתקיים $f(x_n) \in B(f(a), \epsilon)$.

$\Rightarrow$ נניח f לא רציפה בa. עלינו למצוא סדרה $x_n \to a$, ובכל זאת $f(x) \not\to f(a)$.
f לא רציפה בa, כלומר לא קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ יש x כך ש$d(x,a) < \delta$ ובכל זאת $\rho(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. בפרט זה נכון לכל δ מהצורה $\frac{1}{n}$. כלומר לכל n יש x כך ש$d(x,a) < \frac{1}{n}$ ובכל זאת $\rho(f(x), f(u)) \geq \epsilon$. נבחר x כזה ונקרא לו x_n. מכל הבחירות הללו קיבלנו ביחד סדרה $\{x_n\}$.

נראה ש$x_n \to a$. $0 \leq d(x_n, a) < \frac{1}{n}$. לכן[1] $d(x_n, a) \to 0$. לכן[2] $x_n \to a$.
אולם $f(x_n) \not\to f(a)$, כי עבור הϵ שלנו, $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$ לכל n.

קבוצות פתוחות

הגדרה

יהי (M,d) מרחב מטרי.
תת קבוצה $U \subseteq M$ תקרא "קבוצה פתוחה בM" אם לכל $x \in U$ יש $\rho > 0$ כך ש$B(x,r) \subseteq U$.

[1] לפי החומר של אינפי 1
[2] לפי מה שנלמד בשיעור הזה

דוגמה

קטע פתוח ב$\mathbb{R}$ הוא קבוצה פתוחה.

טענה

כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה

יהי $B(a,r)$ כדור פתוח, ותהי $x \in B(a,r)$.
נסמן $\epsilon = r - d(a,x)$. מהגדרת $B(a,r)$ מתקיים ש$d(a,x) < r$ ולכן $\epsilon > 0$, ונראה ש$B(x,\epsilon) \subseteq B(a,r)$. כלומר, צריך להראות שלכלע y אם $d(x,y) < \epsilon$ אז $d(a,y) < r$.
ואכן, אם $d(a,x) < \epsilon$ אז

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + (r - d(a,x)) = r$$

הגדרה

1. $M, \emptyset$ קבוצות פתוחות בM.
2. אם $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות בM אז גם $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה בM.

הוכחה יהי $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} u_\alpha$, אזי יש $\alpha \in I$ כך ש$x \in U_\alpha$. U_α פתוחה בM, לכן יש $r > 0$ כך ש$B(x,r) \subseteq U_\alpha$, לכן ודאי $B(x,r) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in r} U_\alpha$

3. אם $U_1, U_2, ...U_n$ קבוצות פתוחות בM(שימו לב, כאן מדובר באוסף סופי) אזי $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ פתוחה בM.

הוכחה יהי $x \in U_1 \cap ... \cap U_n$. אזי:

- $x \in U_1$ לכן יש $\epsilon_1 > 0$ כך ש$B(x,\epsilon_1) \subseteq U_1$
- $x \in U_2$ לכן יש $\epsilon_2 > 0$ כך ש$B(x,\epsilon_2) \subseteq U_2$

$\vdots$

- $x \in U_n$ לכן יש $\epsilon_n > 0$ כך ש$B(x,\epsilon_n) \subseteq U_n$

נסמן $r = \min\{\epsilon_1, ...\epsilon_n\}$. כיוון שזהו אוסף סופי של מספרים חיוביים ממש, גם המינימום r הוא חיובי ממש, ולכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $B(x,r) \subseteq U_i$, ולכן $B(x,r) \subseteq U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$.