

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.
משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x))^{\ln(x)} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) \cdot \sin(\ln(1 + x^5))}{(1 - \cos(x))^3 x^x} \quad \text{א.}$$

2.

א. חשבו את $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})(e^x - 1)} dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$, ואם כן חשבו אותו.

3.

- א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x e^x = 1$, והוכיחו תשובתכם.
 ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = \ln(x)$, והוכיחו תשובתכם.
 (רמז: הפרידו למקרים $x > 1$, $x \leq 1$)

4. (אין קשר בין הסעיפים)

א. הוכיחו שלכל $1 < x < e$ מתקיים כי $\frac{(\ln(x))^2}{x-1} \leq \frac{2 \ln(x)}{x}$

ב. נתון כי f רציפה בכל הממשיים, וכי $f(1) = 1$.

הוכיחו כי קיים c כך ש $f(c) = -\ln(c)$.

5. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1}$ ותנאי ההתחלה $a_1 = 2$

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ב. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$

ב. חשבו את $\frac{1}{3} \cos\left(\frac{1}{3}\right)$ עד רמת דיוק של $h = 0.001$