אלגברה לינארית 2

תרגיל 5

הגשה בתוך **שבוע** לידי המתרגל(ת) בלבד.

שאלה 1

מצאו את הפולינום האופייני של המטריצות הבאות

א. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

שאלה 2

א. נניח ש A מטריצת בלוקים משולשית עם הבלוקים $B_1,\dots,B_N$, למה שווה $\det A$. הוכיחו זאת .

ב. השתמשו בעובדה זו לחישוב הפולינום האופייני של המטריצה

$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (זוהי מטריצת בלוקים מגודל 2 על 2 , משולשית עליונה)

ג.כיתבו בצורה מפורשת את היחס שבין הפולינום האופייני של מטריצת בלוקים משולשית לפולינומים האופייניים של הבלוקים שלה.

שאלה 3:

תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & & \vdots & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

באשר כל שורה היא "סיבוב" של השורה שלפניה. הוכיחו כי לכל שורש יחידה ρ מסדר n (דהיינו $\rho \in \mathbb{C}$ כך ש $\rho^n = 1$) הווקטור $v = (1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1})$ הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך העצמי המתאים לו.

שאלה 4

הוכיחו הפריכו : מטריצה A ממשית המוגדרת מעל המרוכבים ו- λ_1 ע"ע של A אזי $\bar{\lambda}_1$ (המספר הצמוד) ג"כ ע"ע של A . במקרה שכזה איזה יחס מתקיים בין וקטור עצמי של λ_1 לוקטור עצמי של $\bar{\lambda}_1$?

שאלה 5:

התבוננו במטריצות הריבועיות $n\times n$ הבאות $(a\neq 0)$

$$M=\begin{pmatrix} \lambda & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

הראו כי עבור $k<n$ ל N^k יש 1 דים באלכסון ה kי מעל האלכסון הראשי ו-0 בשאר המקומות.

הראו כי $N^n=0$

הראו על סמך זאת כי M מאפסת את הפולינום $m(t)=(t-\lambda)^n$. הצביעו על הקשר בין פולינום זה לפולינום האופייני של M.