

הצעה לפתרון – חדו"א 2 לאודיסאה – מועד ג' 03/10/22 – עדי מכנס

מרצה: ד"ר ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
משקל כל שאלה: 20 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ e^x - \frac{1}{e^x} & x \neq 0 \end{cases}$$

א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$e^x - \frac{1}{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

פתרון:

נתחיל מטור ידוע:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(לכל $x \in \mathbb{R}$)

לכן:

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

(לכל $x \in \mathbb{R}$)

נחסיר ונקבל:

$$e^x - \frac{1}{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n$$

(לכל $x \in \mathbb{R}$)

קל לראות שהמקדמים הזוגיים מתאפסים, ולכן הנ"ל שקול (לכל $x \in \mathbb{R}$):

$$e^x - \frac{1}{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

■ משל

ב. חשבו את הנגזרות $f^{(100)}(0), f^{(101)}(0)$.

פתרון:

הפונקציה שלה פיתחנו טור בסעיף הקודם כמעט זהה לפונקציה הנתונה. לשם כך יש לחלק את הטור שפיתחנו ב $2x$, לכן עלינו להוכיח שהטור מוגדר בנקודה ושווה לפונקציה ב $x = 0$. (בכל נקודה אחרת מותר לחלק ב $2x$ ולקבל ש:

$$\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

עבור $x = 0$, מתקיים שלכל חזקה $2n \neq 0$ היא 0. אבל עבור $n = 0$ החזקה היא $0^0 = 1$ והמכנה הוא 1 ולפיכך אכן נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

ולכן אכן זהו טור הטיילור של הפונקציה לכל $x \in \mathbb{R}$.

כעת נמצא את המקדם של החזקה ה-100:

$$2n = 100$$

$$n = 50$$

ולכן:

$$\frac{1}{101!} = \frac{f^{(100)}(0)}{100!}$$

(כיוון שהטור מפותח סביב 0). נקבל:

$$f^{(100)}(0) = \frac{1}{101}$$

כמו כן נמצא את המקדם של החזקה ה-101:

$$2n = 101$$

$$n = 51.5 \notin \mathbb{N}$$

כלומר המקדם של x^{101} הוא 0, ולכן:

$$\frac{f^{(101)}(0)}{101!} = 0$$

$$f^{(101)}(0) = 0$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

א. מצאו את פונקציית הגבול $f(x)$, ובפרט את תחום ההגדרה שלה.

פתרון:

אם $x > 1$, ממשפט סדרי הגודל נקבל ש $f_n(x) \rightarrow \infty$.

אם $x = 1$ או $x = -1$ אזי מדובר בסדרה $f_n(1) = \frac{1}{n}$ שברור שהיא שואפת ל 0 (כאשר $x = -1$ ניתן לעשות ערך מוחלט ולקבל בדיוק את אותו הדבר).

אם $-1 < x < 1$ אזי הסדרה היא מכפלת שתי סדרות ששואפות לאפס, ולפיכך גם $f_n(x) \rightarrow 0$.

אם $x < -1$ הסדרה מתבדרת, וגבול הסדרה לא מוגדר.

ביחד נקבל כי:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ב. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[-1,1]$.

פתרון:

נחשב את סדרת החסמים:

$$d_n = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^n}{n} \right|$$

נביט בפונקציה:

$$h(x) = \frac{x^n}{n}$$

נמצא לה מקסימום בקטע $[-1,1]$ (שקיים לפי ויירשטראס). נגזור את הפונקציה:

$$h'(x) = x^{n-1}$$

(נניח כי $n > 0$ בשביל שהפונקציה תוגדר)

לכן קל לראות כי הנ"ל מתאפס רק עבור $x = 0$. כיוון שאנו שמים ערך מוחלט על הפונקציה, לכל x מתקיים כי:

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \geq \left| \frac{0^n}{n} \right| = 0$$

ולכן המקסימום נמצא בקצוות, והוא יהיה עבור $x = \pm 1$, וקל לראות שכיוון שיש ערך מוחלט גודל החסם זהה בשני המקרים. בסה"כ נקבל:

$$d_n = \frac{1}{n}$$

אבל $d_n \rightarrow 0$ ולכן הסדרה מתכנסת במ"ש.

3. תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית המקיימת לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כי

$$f_x(x, y) = f_y(x, y)$$

הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$f(x, y) = f(y, x)$$

רמז: הביטו בפונקציה $g(t) = f(x - t, y + t)$.

פתרון:

ניעזר ברמז ונביט בפונקציה

$$g(t) = f(x - t, y + t)$$

נגזור אותה לפי כלל השרשרת:

$$g'(t) = -t \cdot f_x(x - t, y + t) + t \cdot f_y(x - t, y + t)$$

אבל כיוון שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ הנגזרות החלקיות שוות נקבל כי הנגזרת היא אפס.

לכן הפונקציה עצמה היא קבוע. לכן:

$$f(x-t, y+t) = C$$

לכל $t \in \mathbb{R}$, ובפרט עבור $t = x - y$ וגם $t = 0$:

$$f(x, y) = f(y, x) = C$$

■ משל

4. נביט בפונקציה $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$

א. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x, y)$ (מקס' מקומי, מינ' מקומי, אוקף).

פתרון:

נמצא נקודות חשודות, בהן הגרדיאנט מתאפס:

$$\begin{cases} f_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0 \\ f_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0 \end{cases}$$

קל לראות כי הפתרון היחיד למערכת הוא $(0,0)$.

נגזור פעמיים:

$$\begin{cases} f_{xx} = -2 \cdot \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4(x^2 + y^2 + 1)x}{(x^2 + y^2 + 1)^4} = -2 \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1 - 4x}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ f_{xy} = 4x \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ f_{yy} = -2 \cdot \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4(x^2 + y^2 + 1)y}{(x^2 + y^2 + 1)^4} = -2 \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1 - 4y}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{cases}$$

כאשר נציב $(0,0)$ בפונקציית הדלתא הרוב יתאפס, ונקבל:

$$\Delta(0,0) = (-2) \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$$

והרי $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$ ולכן זהו מקסימום.

הערה: היה ניתן לסווג ללא גזירה ישירות, שכן קל לראות כי לכל x, y :

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \leq \frac{1}{0^2 + 0^2 + 1} = 1$$

ולכן זהו מקסימום גלובלי.

ב. מצאו את הערך המקסימלי והמינימלי של $f(x, y)$ בתחום $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

פתרון:

הנקודה החשודה $(0,0)$, שהוכחנו שהיא קיצון גלובלי נמצאת בתחום, ולכן זהו הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום זה בפרט.

נמצא נקודות חשודות על השפה באמצעות כופלי לגראנז':

נסמן $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ כעת:

$$\begin{cases} \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 2\lambda x \\ \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

עבור המקרה בו $x, y = 0$ טיפלו כבר וביחד נקבל:

$$\begin{cases} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = -\lambda \\ \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = -\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

הנקודות שקיבלנו הן כל מעגל היחידה. למזלנו, כל נקודה שכזו מקיימת $x^2 + y^2 = 1$ ואפשר להציב בפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

ולכן זהו הערך המינימלי של הפונקציה בתחום זה.

5. יהי בית שתחום הרצפה שלו הוא $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ וגובה התקרה שלו הוא $f(x, y) = x$. מצאו את שטח הפנים הכולל של הבית (רצפה, קירות ותקרה).

פתרון:

נחשב כל חלק בנפרד, ונסכום את התוצאה.

רצפה: שטח הרצפה הוא האינטגרל הכפול של 1 על התחום:

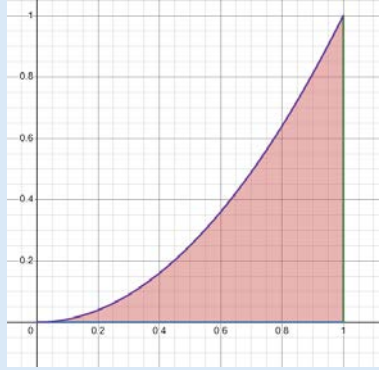
$$S_{\text{רצפה}} = \iint_D 1 =$$

נשים לב כי התחום נתון באופן סטנדרטי לפי x , וניתן לחשבו בקלות יחסית:

$$S_{\text{רצפה}} = \int_0^1 \int_0^{x^2} 1 dy dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

קירות: את הקירות של הבית ניתן לחלק ל-3 (לכובע שלי יש 3 פינות סטייל)

ציר x , ציר y וגרף הפונקציה x^2 , כפי שניתן לראות באיור הבא:



נחשב את שטח כל קיר בנפרד:

קיר I: נבצע פרמטריזציה מתאימה

$$\vec{r}_1 = (t, 0)$$

כאשר $t \in [0,1]$ נקבל:

$$S_{\gamma_1} = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

קיר II: נבצע פרמטריזציה מתאימה

$$\vec{r}_2 = (1, t)$$

כאשר $t \in [0,1]$ נקבל:

$$S_{\gamma_2} = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{0^2 + 1^2} dt = [t]_0^1 = 1$$

קיר III: נבצע פרמטריזציה מתאימה:

$$\vec{r}_3 = (t, t^2)$$

כאשר $t \in [0,1]$ נקבל:

$$\begin{aligned} S_{\gamma_3} &= \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{8} \int_0^1 8t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{5^3} - 1) \end{aligned}$$

תקרה: שטח הפנים של התקרה הוא שטח הפנים של הפונקציה $f(x, y) = x$. נזכור כי לפי משפט:

$$S_{\text{תקרה}} = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \iint_D \sqrt{1 + 1^2 + 0^2} = \iint_D \sqrt{2}$$

נזכור כי D תחום סטנדרטי לפי x , ולכן:

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{2} dy dx = \int_0^1 \sqrt{2} x^2 dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

וביחד:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{12}(\sqrt{5^3} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

6. נביט בתחום $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ בעל השפה C , ונביט בשדה הוקטורי:

$$\vec{F} = (-y^3 + y^2 e^x)\hat{i} + (x^3 + y e^x)\hat{j}$$

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה הוקטורי על השפה נגד כיוון השעון:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

פתרון:

ניעזר במשפט גרין.

$$\begin{cases} Q_x = 3x^2 + y e^x \\ P_y = -3y^2 + 2y e^x \end{cases}$$

ולכן:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D (3x^2 + y e^x + 3y^2 - 2y e^x) dx dy = \iint_D (3(x^2 + y^2) - y e^x) dx dy$$

נעבור לקוארדינטות קוטביות:

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ ונקבל:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 - r \sin(\theta) e^{r \cos(\theta)}) r dr d\theta =$$

כיוון שהתחום מלבני, ניתן להחליף את סדר האינטגרלים ולקבל:

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^3 - r^2 \sin(\theta) e^{r \cos(\theta)}) d\theta dr = \int_0^1 [3r^3 \theta - r e^{r \cos(\theta)}]_0^{2\pi} dr =$$

$$\int_0^1 [6\pi r^3 - r e^r - 0 + r e^r] dr = \int_0^1 6\pi r^3 = \left[\frac{6}{4} \pi r^4 \right]_0^1 = \boxed{\frac{3}{2} \pi}$$