דף תרגילים 2 – הנחיות לפתרון

וקטורים ב R^3 :

1. יהיו a,b,c,d וקטורים ב-R^3. הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$

ב. $(a\times b)\cdot(c\times d)=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$

פתרון: משתמשים בהגדרות של מ"פ ומכפלה וקטורית, ומפשטים את שני הצדדים.

א.

נסמן $a=(a_1,a_2,a_3)$ וכדומה. $b\times c=(b_2c_3-b_3c_2,b_3c_1-b_1c_3,b_1c_2-b_2c_1)$ ו-

$$\begin{aligned}
a\times(b\times c) &= \big(a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3),a_3(b_2c_3-b_3c_2)\\
&\quad -a_1(b_1c_2-b_2c_1),a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\big)\\
&= (a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3,a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2\\
&\quad +a_1b_2c_1,a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2)\\
&= \big(b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3),b_2(a_1c_1+a_3c_3)\\
&\quad -c_2(a_1b_1+a_3b_3),b_3(a_1c_1+a_2c_2)-c_3(a_1b_1+a_2b_2)\big)\\
&= \#\big(b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\
&\quad -c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3),b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\
&\quad -c_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3),b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\
&\quad -c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\big)\\
&= (b_1\langle a,c\rangle-c_1\langle a,b\rangle,b_2\langle a,c\rangle-c_2\langle a,b\rangle,b_3\langle a,c\rangle-c_3\langle a,b\rangle)\\
&= \langle a,c\rangle b-\langle a,b\rangle c
\end{aligned}$$

ב.

ב. $\langle a\times b,c\times d\rangle=\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle-\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle a\times b,c\times d\rangle &= \langle(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1),(c_2d_3-c_3d_2,c_3d_1\\
&\quad -c_1d_3,c_1d_2-c_2d_1)\rangle\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)\\
&\quad +(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)\\
&= a_2b_3c_2d_3+a_3b_2c_3d_2-a_2b_3c_3d_2+a_3b_2c_2d_3+\cdots\\
&= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}a_ic_ib_jd_j-\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}a_id_ib_jc_j=\#\sum_{i,j=1}^{3}a_ic_ib_jd_j-\sum_{i,j=1}^{3}a_id_ib_jc_j\\
&= \sum_{i=1}^{3}a_ic_i\sum_{j=1}^{3}b_jd_j-\sum_{i=1}^{3}a_id_i\sum_{j=1}^{3}b_jc_j=\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle-\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle
\end{aligned}$$

2. יהיו a,b שני וקטורים אורתונורמליים ב-R^3. הראו ש:

א. הווקטורים $a,b,a\times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב- R^3
ב. $(a\times b)\times a=b$, $(a\times b)\times b=-a$ והסבירו את המשמעות הגיאומטרית

פתרון:

3. יהיו a,b שני ווקטורים אורתונורמליים ב-$\mathbb{R}^3$. הראה ש:
א. הווקטורים $a,b,a\times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב-$\mathbb{R}^3$
אורתוגונליות:
$a\perp b$ כי a,b אורתונורמלים. לפי תכונות מכפלה וקטורית תמיד $a\times b\perp b$ ו- $a\times b\perp a$
נורמליות:
$\|a\|=\|b\|=1$ כי a,b אורתונורמלים, למדנו ש- $\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$ כאשר θ היא הזווית בין a ל- b. בגלל ש- $a\perp b$ הזווית הזאת היא $90°$ ולכן $\|a\times b\|=1\cdot1\cdot\sin90°=1$.

ב. $(a\times b)\times a=b$,$(a\times b)\times b=-a$ והסבר את המשמעות הגיאומטרית.
לפי 2.א' $(a\times b)\times a=-a\times(a\times b)=-(\langle a,b\rangle a-\langle a,a\rangle b)=-(0\cdot a-1\cdot b)=b$ ו-
$(a\times b)\times b=-b\times(a\times b)=-(\langle b,b\rangle a-\langle b,a\rangle b)=-(1\cdot a-0\cdot b)=-a$.
מבחינת המשמעות הגיאומטרית, גילינו ב-א' ש- $\{a,b,a\times b\}$ בסיס אורתונורמלי, אבל מכך נובע שהזוגות $\{a,a\times b\}$ ו- $\{b,a\times b\}$ גם אורתונורמליים.

לכן $(a\times b)\times a$ ניצב ל $(a\times b),a$ ואורכו כשטח המקבילית ביניהם (אורך 1) – יש רק שתי אפשרויות לוקטור כזה $\pm b$, וכלל יד ימין קובע את הסימן. כנ"ל לגבי $(a\times b)\times b$

סכומי איינשטיין

3. בסעיפים הבאים הניחו כי $i,j\in\{1,2,3\}$, וכן הניחו שכל המטריצות הן מסדר 3×3.
א. כתבו את הביטוי הבא בכתיב רגיל, ללא סימוני איינשטיין, $a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_s$.
ב. תזכורת: מטריצה A היא **אידמפוטנטית** אם מתקיים $A^2=A$. כתבו תנאי זה בסימוני איינשטיין.
ג. נתון הביטוי $\delta_{ij}a^{ij}$, פשטו אותו ככל האפשר.
ד. תהי A מטריצה הפיכה. נתון הביטוי $A_{ij}\delta^j{}_k A^{ki}$, פשטו אותו ככל האפשר.

פתרון:

א. $\sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 a_j^i b_k^j c_s^k$.
ב. $A^i{}_j A^j{}_k=A^i{}_k$.
ג. $Trace(A)$.
ד. $A_{ij}\delta^j{}_k A^{ki}=A_{ij}A^{ji}=I^i{}_i=3$.

4. תהיינה A,B מטריצות ריבועיות, הוכיחו, בעזרת סימוני הסכימה של איינשטיין $Tr(AB)=Tr(BA)$

5. הוכיחו שפעולת כפל מטריצות מקיימת את חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות), סמנו בסכימת איינשטיין.

6. תהיי $\delta^i{}_j$ פונקצית דלתא של קרונקר $i,j=1,2,...,n$ העריכו את הביטוי $\delta^i{}_j\delta^j{}_k\delta^k{}_i$ (הנתון בסימוני איינשטיין).

פתרונות ל4,5,6 (להתעלם מהמספור)

6. תהיינה A,B מטריצות ריבועיות, הוכח, בעזרת סימוני הסכימה של איינשטיין $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$

כמו שלמדנו, להוכחות כאלה כדאי לסמן את המטריצה עם אינדקטור אחד למעלה ואחד למטה, למשל $A=\left(A_j^i\right)$ (i מסמן שורה ו- j עמודה). בניסוח הזה אם $C=AB$ אז $C_j^i=A_k^iB_j^k$ ולכן $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(C)=C_i^i=A_k^iB_i^k$. בדומה $\mathrm{Tr}(BA)=B_k^iA_i^k$ וזה כמובן שווה ל- $\mathrm{Tr}(AB)=A_i^kB_k^i$.

7. הוכח שפעולת כפל מטריצות הינה דסטרביוטיבית (סמן בסכימת איינשטיין)

$$\left(A(B+C)\right)_j^i=A_k^i(B+C)_j^k=A_k^i\left(B_j^k+C_j^k\right)=A_k^iB_j^k+A_k^iC_j^k=(AB)_j^i+(AC)_j^i$$
$$=(AB+AC)_j^i$$

8. תהיי δ_j^i פונקצית דלתא של קרונקר $i,j=1,2,\dots,n$ הערך את הביטוי $\delta_j^i\delta_k^j\delta_i^k$ (הנתון בסימוני איינשטיין).

לפי הגדרת פונקצית דלתא של קרונקר האיבר δ_j^i הוא המקדם ה- i,j של מטריצת היחידה $I\in M_{n\times n}$ (1 אם $i=j$ ו- 0 אחרת). $I^2=I$ לפי נוסחאת כפל מטריצות $\delta_j^i=I_j^i=I_k^iI_j^k=\delta_k^i\delta_j^k$ לכל i,j. בפרט $\delta_j^i\delta_k^j\delta_i^k=\left(\delta_j^i\delta_k^j\right)\delta_i^k=\delta_k^i\delta_i^k=\delta_i^i=I_i^i$ וזה, כזכור, שווה ל- $\mathrm{Tr}(I)$ ששוה ל- n.