אנליזה מודרנית
תרגיל 7

תאריך הגשה: 27.12.12

תרגיל 1 השאלה הזו לוקחת אותנו קצת אחורה בחומר, אבל היא חשובה מאוד.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים.

1. E מדידה לבג.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה $E \subseteq \mathcal{O}$ ב־$\mathbb{R}$, עבורה $m^*(\mathcal{O}\backslash E) < \varepsilon$.
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה $S \subseteq E$ סגורה ב־$\mathbb{R}$, עבורה $m^*(E\backslash S) < \varepsilon$.
4. קיימת קבוצה $G \in G_\delta$ כך ש־$E \subseteq G$ וגם $m^*(G\backslash E) = 0$.
5. קיימת קבוצה $F \in F_\sigma$ כך ש־$F \subseteq E$ וגם $m^*(E\backslash F) = 0$.

הדרכה.

1. הניחו תחילה כי $m^*(E) < \infty$ והוכיחו $(2) \implies (1)$.
2. עפ"י א' הראו כי לכל קבוצה E מתקיים $(1) \implies (4) \implies (2) \implies (1)$ (אפילו אם $m^*(E) = \infty$).
   בשביל להראות $(1) \implies (4)$ כדאי לזכור שקבוצות מטיפוס G_δ הן מדידות לבג (וגם כמובן קבוצות עם מידת לבג חיצונית 0).
3. עפ"י ב' הראו כי לכל קבוצה E מתקיים $(1) \implies (5) \implies (3) \implies (1)$.
   בשביל הגרירה $(1) \implies (5)$ כדאי לזכור שקבוצות מטיפוס F_σ מדידות לבג (ושוב, כמובן שגם קבוצות עם מידת לבג חיצונית 0).

תרגיל 2

1. בתרגול ראינו שאם $I = [a, b]$ קטע סגור וחסום, אזי מרחב הפונקציות הרציפות בו בהחלט $AC([a, b])$ סגור ביחס לכפל בסקלר, חיבור פונקציות וכפל פונקציות.
   מה ניתן לומר על המרחב $\mathrm{AC}(I)$ אם I קטע לא חסום? הוכיחו את דבריכם!
2. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע כלשהו, $f : I \to \mathbb{R}$ ממחלקה $\mathcal{C}^1(I)$ (גזירה ברציפות בקטע). האם $f \in \mathrm{AC}(I)$?
3. הוכיחו ע"י **שלילת ההגדרה** (ורק ע"י שלילת ההגדרה!) כי פונקציית קנטור אינה רציפה בהחלט בקטע $[0, 1]$.
   רמז. אם בוחרים את הקטעים $\{(a_k, b_k)\}$ בחכמה, זה פשוט.

תרגיל 3 כזכור, אם f פונקציה ממשית ומוגדרת בסביבת הנקודה x, הנגזרת הסימטרית שלה שם מוגדרת ע"י

$$f'_{sym}(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

1. הוכיחו כי אם f גזירה בנקודה כלשהי $x\in\mathbb{R}$ אזי הנגדרת הסימטרית קיימת בנקודה זו, ומתקיים $f'_{sym}(x) = f'(x)$.
2. תנו דוגמא למצב שבו f לא גזירה בנקודה כלשהי x ־ ובכל זאת קיימת $f'_{sym}(x)$.

תרגיל 4 ענו על הסעיפים הבאים,

1. יהי $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ קטע סגור וחסום, ותהי $f:[a,b]\to(0,\infty)$ פונקציה רציפה בהחלט וחיובית ממש. הוכיחו כי $\frac{1}{f}\in \mathrm{AC}([a,b])$.
2. האם סעיף 1 נשאר נכון אם מדובר בקטע פתוח?

בהצלחה!