פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס' 5 - פתרון

1. תהי $u(x,y)=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$. מצא פונקציה הרמונית צמודה ל- u

פתרון:
ראשית, נבדוק באיזה תחום הפונק' u היא הרמונית.

$$u_x=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)+e^x\left(\cos y\right)=e^x\left(x\cos y-y\sin y+\cos y\right)$$
$$u_{xx}=e^x\left(x\cos y-y\sin y+\cos y\right)+e^x\left(\cos y\right)=e^x\left(x\cos y-y\sin y+2\cos y\right)$$
$$u_y=e^x\left(-x\sin y-\sin y-y\cos y\right)$$
$$u_{yy}=e^x\left(-x\cos y-\cos y-\cos y+y\sin y\right)=-e^x\left(x\cos y-y\sin y+2\cos y\right)$$
$$\Downarrow$$
$$u_{xx}+u_{yy}=0 \text{ לכל } x,y$$

כעת נמצא פונק' הרמונית צמודה ל-u, ע"י שימוש בתנאי קושי-רימן:

$$v_y=u_x=e^x\left(x\cos y-y\sin y+\cos y\right)$$
$$\Downarrow$$
$$v=\int e^x\left(x\cos y-y\sin y+\cos y\right)dy+c\left(x\right)=$$
$$=e^x\left[x\int\cos y dy-\int y\sin y dy+\int\cos y dy\right]+c\left(x\right)=$$
$$=e^x\left[x\sin y-\left(-y\cos y+\sin y\right)+\sin y\right]+c\left(x\right)=$$
$$=e^x\left[x\sin y+y\cos y\right]+c\left(x\right)$$
$$\Downarrow$$
$$v_x=e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)+e^x\left(\sin y\right)+c'\left(x\right)=$$
$$=e^x\left(x\sin y+y\cos y+\sin y\right)+c'\left(x\right)$$

כמו כן, $u_y=-e^x\left(x\sin y-\sin y-y\cos y\right)$, ושוב מתנאי קושי-רימן, נסיק כי בהכרח מתקיים - $c'\left(x\right)=0$.

ולכן נסיק כי הפונק' $v\left(x,y\right)=e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)$ היא הרמונית צמודה ל-v.

2. מצא את כל הפונקציות ההרמוניות האפשריות מסוג $u(x,y)=\varphi\left(x^2-y^2\right)$. במילים אחרות מצא את התבנית לפונקציה (ממשית) φ.

פתרון:

$\varphi(t)$ היא פונקציה ממשית של משתנה אחד, ההופכת לפונקציה ממשית של שני משתנים ע״י הצבת הארגומנט $t = x^2 - y^2$. מתנאי ההרמוניות $\Delta u = 0$ נקבל משוואה דיפרנציאלית עבור $\varphi(t)$:

$$u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$$

$$u_x = \varphi'(x^2 - y^2)\cdot 2x, \qquad u_{xx} = \varphi''(x^2 - y^2)\cdot 4x^2 + \varphi'(x^2 - y^2)\cdot 2$$

$$u_y = \varphi'(x^2 - y^2)\cdot(-2y), \qquad u_{yy} = \varphi''(x^2 - y^2)\cdot 4y^2 + \varphi'(x^2 - y^2)\cdot(-2)$$

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 4x^2\varphi''(x^2 - y^2) + 2\varphi'(x^2 - y^2) + 4y^2\varphi''(x^2 - y^2) - 2\varphi'(x^2 - y^2) = 4(x^2 + y^2)\varphi''(x^2 - y^2) = 0$$

השוויון האחרון אמור להתקיים באיזה שהוא תחום 2D , אז יש אפשרות אחד בלבד :

$$x^2 - y^2 = t: \quad \varphi''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = At + B$$

$$u(x,y) = A\left(x^2 - y^2\right) + B$$

3. מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 e^{it}\cdot\cos(at)dt, \ a \in \mathbb{R}$

ב. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 + i}$

<u>פתרון:</u>

א.

$$\int_0^1 e^{it}\cdot\cos(at)dt = \int_0^1 \cos(t)\cdot\cos(at)dt + i\int_0^1 \sin(t)\cdot\cos(at)dt.$$

כיוון ש-

$$\cos(t)\cdot\cos(at) = \left(\cos(t+at) + \cos(t-at)\right)/2$$
$$\sin(t)\cdot\cos(at) = \left(\sin(t+at) + \sin(t-at)\right)/2$$

מתקיים:

$$\int_0^1 e^{it}\cdot\cos(at)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a+1)t}{a+1} + \frac{\sin(1-a)t}{1-a}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{i}{2}\left(\frac{\cos(a+1)t}{a+1} + \frac{\cos(1-a)t}{1-a}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a+1)}{a+1} + \frac{\sin(1-a)}{1-a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a+1)}{a+1} + \frac{\cos(1-a)}{1-a} - \frac{2}{1-a^2}\right), \ a \in \mathbb{R}$$

ב.

ניקח: $\frac{1}{t^2+i} = \frac{A}{t - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{B}{t + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$. לכן: $A = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{4}, \ B = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$.

נציב לאינטגרל ונקבל:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+i} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{4}\log\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1 - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{4}\log\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1$$

4. חשב את האינטגרל $\int_\gamma \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz$ כאשר $\gamma: |z| = 1, 0 \le \arg(z) \le \pi$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה חיובית של המסלול היא: $\gamma : e^{it} = 1, 0 \le t \le \pi$ ומכאן

$$\int_\gamma \left(z^2 + z\overline{z}\right) dz = \int_0^\pi \left(e^{2it} + e^0\right)\left(ie^{it}dt\right) = \int_0^\pi \left(ie^{3it} + ie^{it}\right)dt = \left(\frac{1}{3}e^{3it} + e^{it}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{3}(-1-1) + (-1-1) = -2\frac{2}{3}$$

5. חשב את האינטגרל $\int_C \overline{z}dz$ כאשר:

א. C חצי העליון של עיגול היחידה.

ב. C קטע בין 1 ל- 1- על הציר הממשי.

<u>פתרון:</u>

א. $\int_C \overline{z}dz = \int_0^\pi (\cos t - i\sin t)(-\sin t + i\cos t)\,dt = \int_0^\pi idt = \pi i$

ב. $\int_C \overline{z}dz = \int_{-1}^1 (-t)(-1)\,dt = \int_0^\pi tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^1 = 0$

שני מסלולים מתחילים באותה נקודה ומסתיימים באותה נקודה, אך האינטגרלים שונים.

6. הוכח $\left|\int_\Gamma \frac{1}{z^2}dz\right| \le 2$, כאשר Γ הוא הקטע המקשר בין הנקודות $z_0 = -1 + i$ ו- $z_1 = 1 + i$.

<u>פתרון:</u>

צורת כתיבה אחרת לאותה הערכה היא כדלקמן: $\Gamma = \{z \mid z = x + i, -1 \le x \le 1\}$.

לכן $1 \le |z| \le \sqrt{2}$ ולכן $\frac{1}{2} \le \frac{1}{|z|^2} \le 1$.

$M = \max\left\{\frac{1}{|z|^2} \mid z \in \Gamma\right\} = 1$, $L = length(\Gamma) = 2$ ולכן $\left|\int_\Gamma \frac{1}{z^2}dz\right| \le M \cdot L = 2$.

7. הוכיחו $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 + 2z - 5}{\left(z^2 + 4\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)} = 0$ כאשר $\Gamma_R = \{z \mid |z| = R\}$.

<u>פתרון:</u>

לפי משפט ההערכה: $\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\right| \le 2\pi R \cdot max_{z\in\Gamma_R}\left|f(z)\right|$ (אורך המסלול Γ_R הוא היקף של מעגל ברדיוס R, כלומר $2\pi R$).

לכן, נחפש הערכה כלשהי לחסם על הערך המוחלט של f לאורך המעגל Γ_R .

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{z^2 + 2z - 5}{\left(z^2 + 4\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)}\right| = \frac{\left|z^2\right|\left|1 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2}\right|}{\left|z^4\right|\left|1 + \frac{4}{z^2}\right|\left|1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2}\right|}$$

שימוש באי-שיוויון המשולש, יתן לנו: $\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right| \le |1|+\left|\frac{2}{z}\right|+\left|\frac{5}{z^2}\right| = 1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2} = 1+\frac{2}{R}+\frac{5}{R^2}$

ולכן עבור R גדול מספיק נקבל: $\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right| \le 2$

z נמצאת על המעגל $\{|z|=R\}$

כמו כן, $\left|1+\frac{4}{z^2}\right| \ge \left|1-\left|\frac{4}{z^2}\right|\right| = \left|1-\frac{4}{|z|^2}\right| = \left|1-\frac{4}{R^2}\right|$, ולכן עבור R מספיק גדול נקבל: $\left|1+\frac{4}{z^2}\right| \ge \frac{1}{2}$.

ואחרון - $\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \ge \left|1-\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|\right|$. וכן - $\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \le \frac{2}{|z|}+\frac{2}{|z|^2} = \frac{2}{R}+\frac{2}{R^2}$. עבור R מספיק גדול נקבל $\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \le \frac{1}{2}$, ולכן: $\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \ge \frac{1}{2}$.

ונקבל:

$$|f(z)| \le \frac{\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|}{|z|^2\left|1+\frac{4}{z^2}\right|\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|} \le \frac{2}{R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{R^2}$$
(עבור R מספיק גדול).

ולכן, עבור R מספיק גדול - $\max_{z\in\Gamma_R}|f(z)| \le \frac{8}{R^2}$.

ונקבל: $\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \le 2\pi R\cdot\frac{8}{R^2} = \frac{16\pi}{R} \to_{R\to\infty} 0$

ולכן נסיק כי: $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$ (כלל הסנדוויץ' מחדו"א עובד גם כאן) - **מש"ל.**