

בוחרן אמצע

3 ביוני 2015

1. חשב:

(א)

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \sin x}{(\ln(1+x))^4}$$

(ג)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$$

2. תהי $f(t)$ פונקציה ב גזירה ב \mathbb{R} כך ש $f(0) > 0$. נגדיר $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$. הוכח ל F נק' קיצון מינימום מקומי ב 0.

פתרון: שתי דרכים: נשים לב שמתקיים

$$\operatorname{sgn} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = \operatorname{sgn} x$$

בסביבה מספיק קטנה של 0 עבור $x \neq 0$ ולכן

$$x \int_0^x f(t) dt > 0$$

בסביבה מספיק קטנה של 0 עבור $x \neq 0$ ו $x \int_0^x f(t) dt = 0$ עבור $x = 0$. ולכן יש מינימום ב 0.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_0^x x f(t) dt \right)' = \left(x \int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \int_0^x f(t) dt + x f(x) \end{aligned}$$

והצבה נותנת $F'(x) = 0$. נגזרת שניה נותנת

$$F''(x) = f(x) + f(x) + xf'(x) = 2f(x) + xf'(x)$$

ואחרי הצבה $F''(0) > 0$ ולכן יש נקודת מינימום כנדרש.

3. מותר להשתמש בסעיף אחד לצורך פתרון סעיף שני.

(א) קבע את התכנסות והכנסות בהחלט של האינטגרל

$$\int_0^{\infty} x \sin x^4 dx$$

פתרון: נבצע הצבה $x = \sqrt[4]{t}$. נקבל $dx = dt \frac{1}{4t^{3/4}}$. גבולות נשארים אותם גבולות. נציב ונקבל

$$\int_0^{\infty} x \sin x^4 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

והאינטגרל מימין מתכנס לפי דיריכלה. נראה שהאינטגרל לא מתכנס בהחלט.

$$\int_0^{\infty} |x \sin x^4| dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right| dt$$

נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right| dt &\geq \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2t}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt - \int_0^{\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}} dt \end{aligned}$$

והאינטגרל מימין מתבדר ולכן גם האינטגרל משמאל מתבדר ולכן לא מתכנס בהחלט.

(ב) נניח ש f אינטגרלית בקטע $[0, b]$ לכל $0 < b < \infty$ ו $\int_0^{\infty} f(x) dx$ מתכנס. הוכח/הפרד: $f(x)$ חסומה ב $[0, \infty)$.

פתרון: הפרכה על ידי דוגמה נגדית עם משולשים בגובה n ובסיס באורך $\frac{1}{n^3}$ או בסעיף ב.