

בוחן בדידה-פתרון



יוצרים: דן בן חנוך ועדי מכנס ה
הערה: זה פתרון מלא, למעוניינים לראות את הרעיונות מוזמנים לעלעל בקובץ מחשבות על הבוחן של מכנסיים

1. נגדיר $A_1 = \{1\}, B_1 = \{2\}$. עוד נגדיר, לכל n טבעי, את הקבוצות

$$A_{n+1} = B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\}$$

$$B_{n+1} = A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}$$

(א) (10 נקודות) כתבו מפורשות את הקבוצות A_2, B_2 .

פתרון:

$$\begin{aligned} A_2 &= B_1 \cup \{x + 2^1 \mid x \in A_1\} = \{2\} \cup \{x + 2 \mid x \in \{1\}\} \\ &= \boxed{\{2, 3\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= A_1 \cup \{x + 2^1 \mid x \in B_1\} = \{1\} \cup \{x + 2 \mid x \in \{2\}\} \\ &= \boxed{\{1, 4\}} \end{aligned}$$

(ב) (20 נקודות) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים כי

$$A_n \cup B_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

פתרון:

נוכיח את המבוקש באינדוקציה על n .

בסיס: אכן, עבור $n = 1$ מתקיים כי:

$$A_1 \cup B_1 = \{1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

צעד: יהי n עבורו הטענה מתקיימת. נוכיח כי עבור $n + 1$ הטענה מתקיימת גם כן. כלומר צ"ל:

$$A_{n+1} \cup B_{n+1} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

אבל לפי הגדרת הקבוצות לעיל, מתקיים כי:

$$A_{n+1} \cup B_{n+1} =$$

$$\begin{aligned} &(B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\}) \cup (A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}) = \\ &(A_n \cup B_n) \cup (\{x + 2^n \mid x \in A_n\} \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}) = \\ &(A_n \cup B_n) \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n \cup B_n\} \end{aligned}$$

מתכונות האיחוד ומהגדרתו. אבל מהנחת האינדוקציה נקבל כי:

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

$$\cup \{x + 2^n \mid x \in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}\}$$

ולמעשה, קל לראות כי מכיוון ש:

$$1 \leq x \leq 2^n$$

אזי:

$$2^n + 1 \leq x + 2^n \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

ולכן ניתן לכתוב את הנ"ל בצורה קריאה יותר לעיני הקוראים
והבודקים:

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

$$\cup \{x \in \mathbb{N} \mid 2^n + 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

והרי:

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

משל ■.

(ג) (20 נקודות) הוכיחו כי מתקיים

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$$

פתרון:

נוכיח את המבוקש בעזרת הכלה זו כיוונית.

☐ ברור. כל המספרים ב A_n טבעיים, למה שיהיה איבר לא טבעי
באיחוד?¹

☐ יהי $n \in \mathbb{N}$. צריך למצוא קבוצה (ליתר דיוק אינדקס k) כך ש
 $n \in A_k$.

ראשית, קל לראות (ולהוכיח באינדוקציה כ"כ) כי:

$$1 \leq n \leq 2^n$$

לכל $n \in \mathbb{N}$. לפיכך:

$$n \in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^x\}$$

$$\in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\} \stackrel{(א.1)}{=} A_n \cup B_n$$

כעת נחלק למקרים.

אם $n \in A_n$ נבחר $k = n$ וסיימנו.

אחרת, $n \in B_n$. לפיכך נשים לב כי:

¹ (למה לא בעצם?) תודה ל @שקד~♦.

$$n \in B_n \subseteq A_{n+1}$$

ולכן אם נבחר $k = n + 1$ נקבל הדרוש.
משל ■.

פתרון נוסף של אייל בראונשטיין ה־Σ:

נשים לב כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n \in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2^n\}$$

$$= A_n \cup B_n$$

$$\subseteq A_n \cup A_{n+1}$$

$$\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

2. (20 נקודות לכל סעיף) נסמן $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ ונגדיר יחס R על

$$P(S \times S)$$

כך: לכל $A, B \subseteq S \times S$ מתקיים ARB אם ורק אם

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

הוכיחו:

(א) R הוא יחס שקילות על $P(S \times S)$.

פתרון:

רפלקסיביות:

מתקיים ARA כי:

לכל זוג סדור $(x, y) \in A$ קיים $s = y$ כך ש $(x, y) \in A$ ואותו דבר לצד השני

סימטריות:

אם ARB לכן:

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

ולכן:

$$[\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

ולכן BRA

טרנזיטיביות:

אם ARB ו BRC אז:

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

$$[\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in C]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in C \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

ולכן:

יהי $(x, y) \in A$ לכן קיים s_1 כך ש $(x, s_1) \in B$ לכן קיים s_2 כך

ש $(x, s_2) \in C$ ולכן הוכחנו את הצד הזה

נוכיח את הצד השני:

יהי $(x, y) \in C$ לכן קיים s_1 כך ש $(x, s_1) \in B$ לכן קיים s_2 כך

ש $(x, s_2) \in A$ ולכן ניצחנו!

(א) הוכיחו: לכל שני יחסי סדר (חלקיים) T_1, T_2 על הקבוצה S מתקיים כי

$$[T_1]_R = [T_2]_R$$

פתרון:

בעצם, לפי משפט מההרצאה מספיק להראות ש:

$$T_1 R T_2$$

יהי $(x, y) \in T_1$ לכן מרפליקסיביות $(x, x) \in T_2$ ולכן ניקח $s = x$ ואכן מתקיים

(ב) מצאו את גודל קבוצת המנה. כלומר, מצאו כמה איברים (שונים) יש

$$P(S \times S)/_R$$

פתרון:

טענה:

$$[\emptyset]_R = \{\emptyset\}$$

הוכחה: לכל קבוצה שאינה ריקה, היחס עם הריקה לא מתקיים, שכן לא קיים אף איבר שנמצא בקבוצת הריקה – ולפיכך היחס לא מתקיים.

טענה:

תהי $A \neq \emptyset \subseteq S$. אזי לכל קבוצה $X \neq \emptyset$ מתקיים כי:

$$[A \times X]_R = \{A \times Y \mid Y \neq \emptyset\}$$

הוכחה:

$\supseteq$ תהי $A \times Y$ כנ"ל. נוכיח כי $(A \times X)R(A \times Y)$. נוכיח פסוק אחד מהיחס, השני די זהה.

יהי $(a, x) \in A \times X$ (קיים כזה כי שתי הקבוצות לא ריקות). יש למצוא $y \in Y$ כך שמתקיים כי $(a, y) \in A \times Y$. אבל אכן קיים כזה משום ש $Y \neq \emptyset$.

$\subseteq$ תהי $C \in [A \times X]_R$, נראה שהיא מהצורה $A \times Y$. כמובן $C \neq \emptyset$

לפי מה שהסברנו קודם לכן. נסמן: $C = D \times E$ וצ"ל ש $A = D$. יהי $d \in D$. קיים זוג סדור $(d, e) \in C$ שכן E אינה ריקה (שכן אחרת C ריקה). אבל $(D \times E)R(A \times X)$ ולכן קיים $x \in X$ כך שנקבל כי $(d, x) \in A \times X$, ולכן $d \in A$. באופן סימטרי (משחק מילים) ההכלה בכיוון השני דומה, וביחד נקבל כי $D = A$ כפי שביקשנו.

לפיכך, מחלקת השקילות של מכפלה קרטזית $A \times B$ תלוי אך ורק ב A . לכן כמות מחלקות השקילות היא כמות הקבוצות $A \in P(S)$. אבל כמה קבוצות כאלו יש? $|P(S)| = 2^{|S|} = 2^{100}$ ולכן יש בקבוצת המנה 2^{100} איברים בדיוק.