פתרון 3 בפונקציות מרוכבות

1. קודם כל היא צריכה להיות הרמונית ולכן צריך שיתקיים

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

במקרה שלנו

$$u_{xx} + u_{yy} = 2a + 2c$$

ולכן תנאי הכרחי הוא $c = -a$ אז אפשר להניח ש

$$u(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2$$

כעת נחפש את $v(x, y)$. לפי קושי רימן

$$v_y = u_x = 2ax + by$$

$$v(x, y) = 2axy + \frac{b}{2}y^2 + D(x)$$

לפי המשוואה השניה

$$2ay + D'(x) = v_x = -u_y = -bx + 2ay$$

$$D'(x) = -bx$$

$$D'(x) = -\frac{b}{2}x^2 + D$$

ולכן

$$v(x, y) = 2axy + \frac{b}{2}y^2 - \frac{b}{2}x^2 + D$$

עכשיו נמצא את $f(z)$:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= ax^2 + bxy - ay^2 + i(2axy + \frac{b}{2}y^2 - \frac{b}{2}x^2 + D) = \\
&= ax^2 + 2iaxy - ay^2 + \frac{i}{2}(by^2 - i2bxy - bx^2) + iD = \\
&= a(x + iy)^2 - \frac{i}{2}(bx^2 + 2ibxy - by^2) + iD = \\
&= az^2 - \frac{i}{2}b(x + iy)^2 + iD = az^2 - \frac{i}{2}bz^2 + iD = \\
&= Ez^2 + D
\end{aligned}$$

כאשר $E \in \mathbb{C}$ ו $D \in \mathbb{R}$.

2. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

(א) $\sin(i)$.
פתרון: לפי נוסחא

$$\sin i = i \sinh(1) = i\frac{e-e^{-1}}{2}$$

(ב) $\cos(-i)$.
פתרון: שוב לפי נוסחא

$$\cos(-i) = \cos i = \cosh 1 = \frac{e+e^{-1}}{2}$$

(ג) $\tan(1+i)$
פתרון: נסמן $z = 1+i$ ואז

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin z}{\cos z}\frac{\cos \overline{z}}{\cos \overline{z}} = \frac{\sin(z+\overline{z}) + \sin(z-\overline{z})}{\cos(z+\overline{z}) + \cos(z-\overline{z})}$$

במקרה שלנו זה יוצא

$$\frac{\sin(2) + \sin(2i)}{\cos(2) + \cos(2i)} = \frac{\sin(2)}{\cos(2) + \cosh(2)} + i\frac{\sinh(2)}{\cos(2) + \cosh(2)}$$

3. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \overline{z}$ גזירה.
פתרון:

$$\cos \overline{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{y} + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i \sin x)e^{y} + e^{-y}(\cos x - i \sin x)$$

כלומר

$$u(x,y) = \cos x(e^{y} + e^{-y}) \quad v(x,y) = \sin x(e^{y} - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin x(e^{y} + e^{-y}) \\ u_y &= \cos x(e^{y} - e^{-y}) \\ v_x &= \cos x(e^{y} - e^{-y}) \\ v_y &= \sin x(e^{y} + e^{-y}) \end{aligned}$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y+e^{-y})=\sin x(e^y+e^{-y})$$

$$\cos x(e^y-e^{-y})=-\cos x(e^y-e^{-y})$$

היות ש $e^y+e^{-y}>0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x=0$ כלומר ש $x=\pi k$
לכן $\cos x\neq 0$ והמשוואה השניה אומרת ש

$$e^y-e^{-y}=0$$

שזה בקלות מכריח $y=0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k,0)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

4. פתרו את המשוואה $e^{e^z}=1$.
פתרון: לפי התכונות של e אנחנו יודעים בעצם ש

$$e^z=2\pi ik\quad k\in\mathbb{Z}$$

אם $k=0$ כמובן שאין לזה פתרון. עבור $k>0$ נקבל

$$2\pi ik=e^{\ln(2\pi k)}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ולכן

$$z=\ln(2\pi k)+i\frac{\pi}{2}+2\pi in\quad n\in\mathbb{Z}$$

ועבור $k<0$ נקבל בדומה

$$z=\ln(2\pi|k|)-i\frac{\pi}{2}+2\pi in\quad n\in\mathbb{Z}$$

אם נאחד את הפתרונות נקבל

$$z=\ln(2\pi|k|)+i\frac{\pi}{2}+\pi in\quad k,n\in\mathbb{Z}\quad k\neq 0$$

5. (א)

$$(1+i)^{2i}=e^{2i\log(1+i)}=e^{2i(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}=e^{i\ln 2}e^{-(\frac{\pi}{4}+4\pi k)}$$

(ב)

$$(-i)^{(-i)}=e^{-i(\ln(|-i|)+i(-\frac{\pi}{2}+2\pi k))}=e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

(ג)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}((1-i)^{1+i}) &= \mathrm{Im}(e^{(1+i)(\ln\sqrt{2}+i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k))}) = \\ &= \mathrm{Im}(e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k)}) = \\ & e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\sin(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k)\end{aligned}$$

6. ניקח $w=i$ ו $z=2\pi i$ ואז

$$(e^z)^w = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw}$$

7. נניח $\tan w = z$, כלומר

$$\frac{\sin w}{\cos w} = z$$

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} = z$$

$$e^{iw}-e^{-iw} = ize^{iw}+ize^{-iw}$$

$$e^{2iw}-1 = ize^{2iw}+iz$$

$$e^{2iw}(1-iz) = iz+1$$

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$2iw = \log\frac{1+iz}{1-iz}$$

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$$