

נדגים זאת ע"י דוגמא: $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ ובסיס $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ל V . אזי אפשר להגדיר ה"ל יחידה $T : V \rightarrow W$ ע"י קביעה

$$Tv_1 = w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Tv_2 = w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מה ההגדרה של T באופן מפורש?

בשביל לענות על זה צריך לדעת עבור כל $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ מה הוא $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$!

טוב עבור v_1 זה קל כי לפי ההגדרה הנתונה זה שווה ל $Tv_1 = w_1$

טוב עבור v_2 זה קל כי לפי ההגדרה הנתונה זה שווה ל $Tv_2 = w_2$.

מה עבור וקטורים אחרים? למשל מה עם $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$? אה! פשוט v ניתן להצגה

יחידה של איברי B ככה

$$v = 5v_1 - 3v_2$$

כיוון ש T ה"ל ניתן לחשב

$$Tv = T(5v_1 - 3v_2) = 5Tv_1 - 3Tv_2 = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

לכן T מעתיקה את v שלנו לוקטור $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

אוקי, בוא ננסה עוד אחד-למשל מה עם $v' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$? אה! פשוט v' ניתן להצגה

יחידה של איברי B ככה

$$v' = 4v_1 + 0v_2$$

כיוון ש T ה"ל ניתן לחשב

$$Tv' = T(4v_1 + 0v_2) = 4Tv_1 + 0Tv_2 = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

לכן T מעתיקה את v' שלנו לוקטור $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

אוקי, מיצינו - ומה באופן כללי? לאן T מעתיקה את $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$? אה! פשוט וקטור זה ניתן להצגה יחידה של איברי B ככה

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b)v_1 + bv_2$$

כיוון ש T ה"ל ניתן לחשב

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = T((a-b)v_1 + bv_2) = (a-b)Tv_1 + bTv_2 = (a-b)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a-b) \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2(a-b) \\ a \\ -a \end{pmatrix} \text{ שלנו לוקטור } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ את } T \text{ מעתיקה}$$

לסיכום

$$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V : T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(a-b) \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$