אינפי 4 – תרגיל 1

1. הגדרנו שתי מסילות $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n,\ g:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ להיות <u>שקולות</u> אם קיימת פונקציה מונוטונית עולה במובן הצר , רציפה ועל : $\varphi:[a,b]\to[c,d]$, כך שמתקיים

$\forall s\in[a,b].\ g(\varphi(s))=f(s)$. הראו כי היחס של "שקילות בין מסילות " כמו שהוגדר הינו סימטרי ,רפלקסיבי וטרנזיטיבי (כלומר – א.כל מסילה שקולה לעצמה ,ב. אם מסילה f שקולה למסילה g אז g שקולה למסילה f ו-ג. אם מסילה f שקולה למסילה g , מסילה g שקולה למסילה h, אז מסילה f שקולה למסילה h) .

---

2. ראינו כי עבור מסילה גזירה ברציפות למקוטעין $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, ניתן לחשב את אורכה על ידי : $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$, (בנוסף להגדרת אורך של מסילה – באם קיים !) .

חשבו את אורך העקומה הנתונה על ידי : $\gamma(t)=\left(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t\right),\ t\in[0,1]$.

---

3. נגדיר : $f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right), & 0<x\le 1\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$.כעת נגדיר מסילה :

$\gamma(t)=(t,f(t)), for\ t\in[0,1]$.האם מסילה זו היא בעלת אורך (סופי ...) ?

{הסתכלו על למשל , $f(\frac{1}{k})$ והפרידו ל- k זוגי ולאי זוגי ... } .

4.תהי y=f(x) פונקציה רציפה על קטע [a,b] , גזירה בו ברציפות .

הוכיחו כי לגרף הפונקציה בקטע זה קיים אורך סופי שנתון על ידי :

$\int_a^b\sqrt{1+(y(x)')^2}dx$. {רמז : איך ניתן להציג את גרף הפונקציה כמסילה ? ...) .

5.הוכיחו כי עבור מסילה חלקה הנתונה בקואורדינטות קוטביות : $r=r(\theta)$, עבור $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, ניתן להביע את אורכה על ידי : $L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta$, וחשבו את אורך הקרדיואידה : $r=1+\cos\theta\ ,\theta\in[0,2\pi]$. {רמז : ייתכן שימוש בפונקיות טריגו' של זווית כפולה ...} .