

## משפט סילו 2:

תחת התנאים של משפט סילו 1  $(p, m) = 1, |G| = p^n m$ :

- (א) כל ת"ח  $H \leq G$  מסדר  $p^k$  כאשר  $1 \leq k \leq n$  מוכלת באיזשהי ת"ח  $p$ -סילו.  
 (ב) כל שני ת"ח  $p$ -סילו הם צמודות.

הוכחה

תהא  $H \leq G$  עם  $|H| = p^k$ .

קבוצת ת"ח  $p$ -סילו  $Syl_p =$

ע"פ משפט סילו 1:

$$Syl_p \neq \emptyset$$

תהא  $P \in Syl_p$  ונגדיר פעולה  $H \times G/p \rightarrow G/p$  ע"י  $(h, xP) \mapsto hxP$

פעולת  $H$  מחלקת את איברי  $G/p$  למסלולים זרים. נזכר כי  $H$  היא חבורת  $p$ , ולכן:

$$m = |G/p| = \sum_{x \text{ rep}} |H * xp| = \sum_{x \text{ rep}} [H: Stb(xp)] = \sum_{x \text{ rep}} p^{r_x}$$

אבל  $(m, p) = 1$  ולכן בהכרח לפחות  $r_x = 0$  עבור  $x$  אחד, כלומר קיימת לפחות נקודת שבת אחת, כלומר קיים  $xP$  כל שלכל  $h \in H$

$$hxP = xP \Leftrightarrow x^{-1}hxP = x^{-1}xP = P \Leftrightarrow x^{-1}hx \in P \Leftrightarrow h \in xPx^{-1} \Rightarrow H \subseteq xPx^{-1}$$

$$|xPx^{-1}| = |P| = p^n$$

(ב)

ע"פ סעיף קודם בפרט עבור  $P_1 \in Syl_p(G)$  (מסדר  $p^n$ ) קיימת  $P_2 \in Syl_p(G)$  כך ש:  $P_1 \subseteq xP_2x^{-1}$  עבור  $x$  כלשהו.

$$P_1 = xP_2x^{-1} \text{ ולכן } |xP_2x^{-1}| = |P_2| = p^n = |P_1|$$

ההצמדה לא משנה את גודל הקבוצה!.

לכל  $|H| = p^k$  יכולנו להתחיל עם  $P \in Syl_p(G)$

$H \times G/p$  אתה יכול להתחיל עם כל  $P$  שאתה רוצה ותקבל

$$H \subseteq xPx^{-1}$$

תוצאה

$$Syl_p(G) = \{P\} \Leftrightarrow P \triangleleft G$$

הוכחה

$$Syl_p(G) = \{P\} \Leftrightarrow \forall x \in G: xPx^{-1} = P \Leftrightarrow \forall x \in G: xP = Px$$