פתרון 4 בפונקציות מרוכבות

1. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

(א) $\sin(i)$.
פתרון: לפי נוסחא

$$\sin i = i \sinh(1) = i\frac{e - e^{-1}}{2}$$

(ב) $\cos(-i)$.
פתרון: שוב לפי נוסחא

$$\cos(-i) = \cos i = \cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

(ג) $\tan(1+i)$
פתרון: נסמן $z = 1 + i$ ואז

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin z}{\cos z}\frac{\cos \overline{z}}{\cos \overline{z}} = \frac{\sin(z + \overline{z}) + \sin(z - \overline{z})}{\cos(z + \overline{z}) + \cos(z - \overline{z})}$$

במקרה שלנו זה יוצא

$$\frac{\sin(2) + \sin(2i)}{\cos(2) + \cos(2i)} = \frac{\sin(2)}{\cos(2) + \cosh(2)} + i\frac{\sinh(2)}{\cos(2) + \cosh(2)}$$

2. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \overline{z}$ גזירה.
פתרון:

$$\cos \overline{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{y} + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i \sin x)e^{y} + e^{-y}(\cos x - i \sin x)$$

כלומר

$$u(x,y) = \cos x(e^{y} + e^{-y}) \quad v(x,y) = \sin x(e^{y} - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin x(e^{y} + e^{-y}) \\ u_y &= \cos x(e^{y} - e^{-y}) \\ v_x &= \cos x(e^{y} - e^{-y}) \\ v_y &= \sin x(e^{y} + e^{-y}) \end{aligned}$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y+e^{-y}) = \sin x(e^y+e^{-y})$$

$$\cos x(e^y-e^{-y}) = -\cos x(e^y-e^{-y})$$

היות ש $e^y+e^{-y}>0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x=0$ כלומר ש $x=\pi k$ לכן $\cos x\neq 0$ והמשוואה השניה אומרת ש

$$e^y-e^{-y}=0$$

שזה בקלות מכריח $y=0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k,0)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

3. (א)

$$(1+i)^{2i}=e^{2i\log(1+i)}=e^{2i(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}=e^{i\ln 2}e^{-(\frac{\pi}{4}+4\pi k)}$$

(ב)

$$(-i)^{(-i)}=e^{-i(\ln(|-i|)+i(-\frac{\pi}{2}+2\pi k))}=e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

(ג)

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}((1-i)^{1+i})&=\operatorname{Im}(e^{(1+i)(\ln\sqrt{2}+i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k))})=\\&=\operatorname{Im}(e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k)})=\\&e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\sin(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k)\end{aligned}$$

4. ניקח $w=i$ ו $z=2\pi i$ ואז

$$(e^z)^w=1\neq e^{-2\pi}=e^{zw}$$

5. נניח $\tan w=z$, כלומר

$$\frac{\sin w}{\cos w}=z$$

$$\frac{\sin w}{\cos w}=\frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}=z$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = ize^{iw} + ize^{-iw}$$

$$e^{2iw} - 1 = ize^{2iw} + iz$$

$$e^{2iw}(1 - iz) = iz + 1$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$2iw = \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

6. (א) עבור הענף העיקרי של הלוגריתם

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

כאשר

$$\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$$

אם נסמן

$$z = Re^{i\theta}$$

אז כמובן

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R} e^{-i\theta}$$

ולכן

$$\operatorname{Log} \frac{1}{z} = \ln|\frac{1}{z}| + i \operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\ln|z| - i\theta = -\operatorname{Log} z$$

(ב) אם נבחר ענף שעבורו הזוית היא בין $(0, 2\pi)$ וניקח $z = i$ אז

$$\log \frac{1}{z} = \log(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

ו

$$-\log z = -\log i = -i\frac{\pi}{2}$$

כך שאין שוויון.