

## תרגיל 5 – אנליזה פונקציונלית

### תרגיל 1

נניח ש  $H$  מרחב הילברט ספרבילי (ממימד אינסופי) ו  $x_n \xrightarrow{w} x, y_n \xrightarrow{w} y$  ב  $H$  (התכנסות חלשה) וש  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  (ב  $\mathbb{C}$ ). הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

א.  $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$

ב.  $\alpha_n x_n \xrightarrow{w} \alpha x$

ג.  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

ד.  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$

ה. אם  $x_n = y_n$  לכל  $n$  אז  $x = y$ .

הגדרה: נאמר ש- $x_n \xrightarrow{w} x$  (התכנסות חלשה) אם לכל  $y \in H$ ,  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

### תרגיל 2

א. יהי  $A$  נתון על ידי  $A(f) = \int_0^1 t f(t) dt$ . האם  $A$  פונקציונל לינארי רציף במרחב  $\mathcal{L}_2([0,1])$ .

ב. יהי  $B$  נתון על ידי  $B(f) = \int_0^1 f(t) \frac{2}{t-1} dt$ . האם  $B$  פונקציונל לינארי רציף במרחב  $\mathcal{L}_2([0,1])$ .

אין צורך להוכיח לינאריות של  $A$  ו  $B$ . הוכיחו את טענתכם.