

עצים מאוזנים

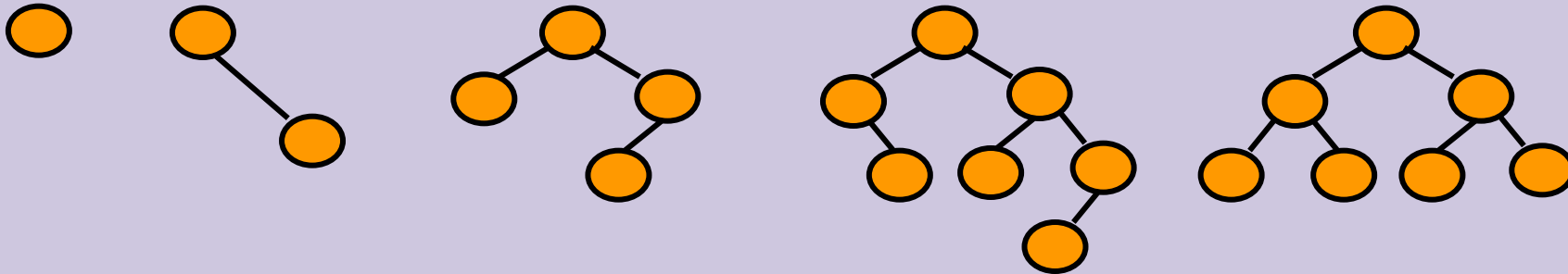
הגדרה: משפחת עצים תקרא מאוזנת אם $h(T) = O(\log n)$, כאשר T הוא עץ במשפחה, n הוא מספר הצמתים ב- T ו- $h(T)$ הוא הגובה של T

עצי AVL (Adelson-Velsky, Landis)

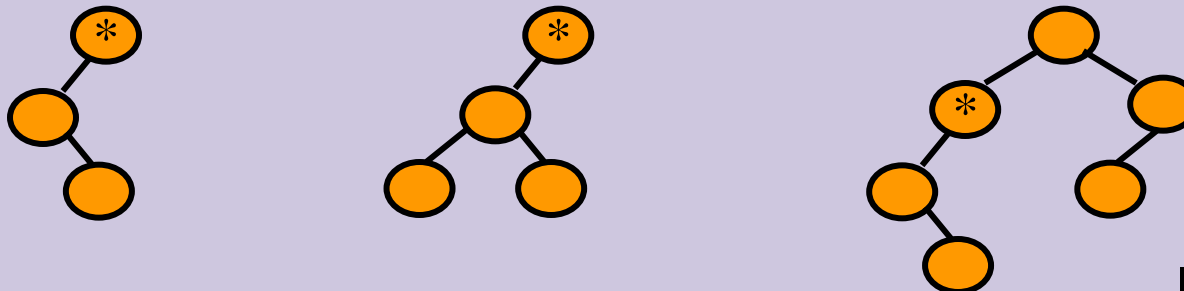
הגדרה: עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שבו לכל צומת v התכונה:

$$|h(v \rightarrow \text{left}) - h(v \rightarrow \text{right})| \leq 1$$

דוגמאות



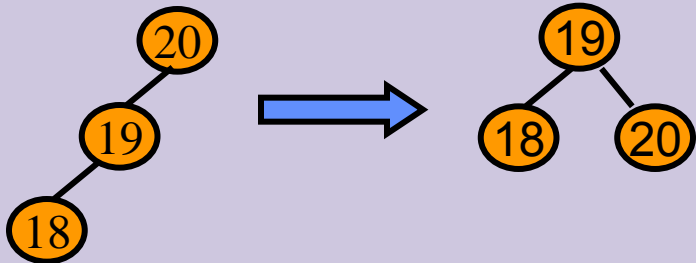
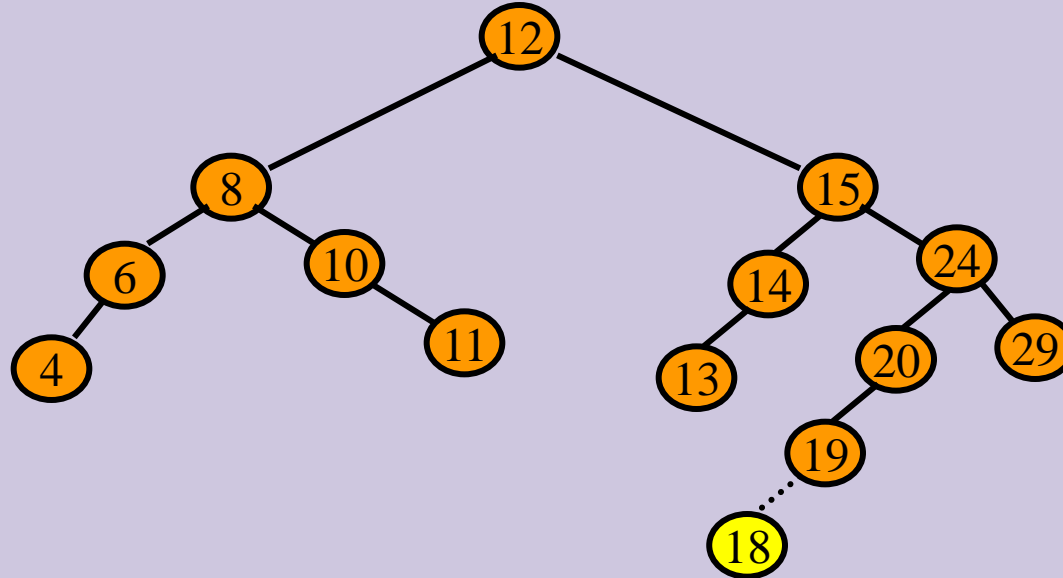
דוגמאות נגד



* בצומת בו מופר האיזון

איזון בעץ AVL

זמן החיפוש בעץ AVL הוא $O(\log n)$. נצטרך לדאוג שלאחר הכנסה או הוצאה, העץ הנותר יהיה עץ AVL.



לאחר הוספת האיבר 18 נתקבל עץ שאינו עץ AVL. אבל נתן לשנות את תת העץ שבו הופר האיזון בצורה הבאה:

תיקון כזה נקרא גלגול.

בזמן הוצאה קיימת הפרת איזון דומה. למשל בהוצאת 29.

איזון בעץ AVL (המשך)

בעץ AVL תקין: $|BF(v)| \leq 1$

עבור צומת v בעץ בינרי נסמן:

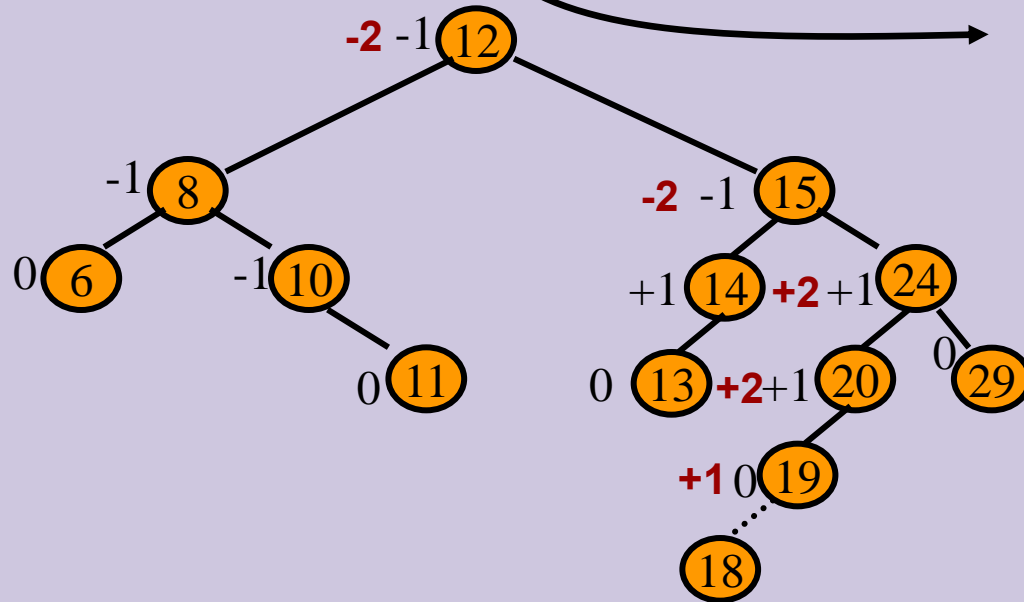
$h_L(v)$ גובה תת העץ השמאלי של v .

$h_R(v)$ גובה תת העץ הימני של v .

גורם האיזון (Balance Factor) מחושב כהפרש

הגבהים: $BF(v) = h_L(v) - h_R(v)$

לדוגמא:

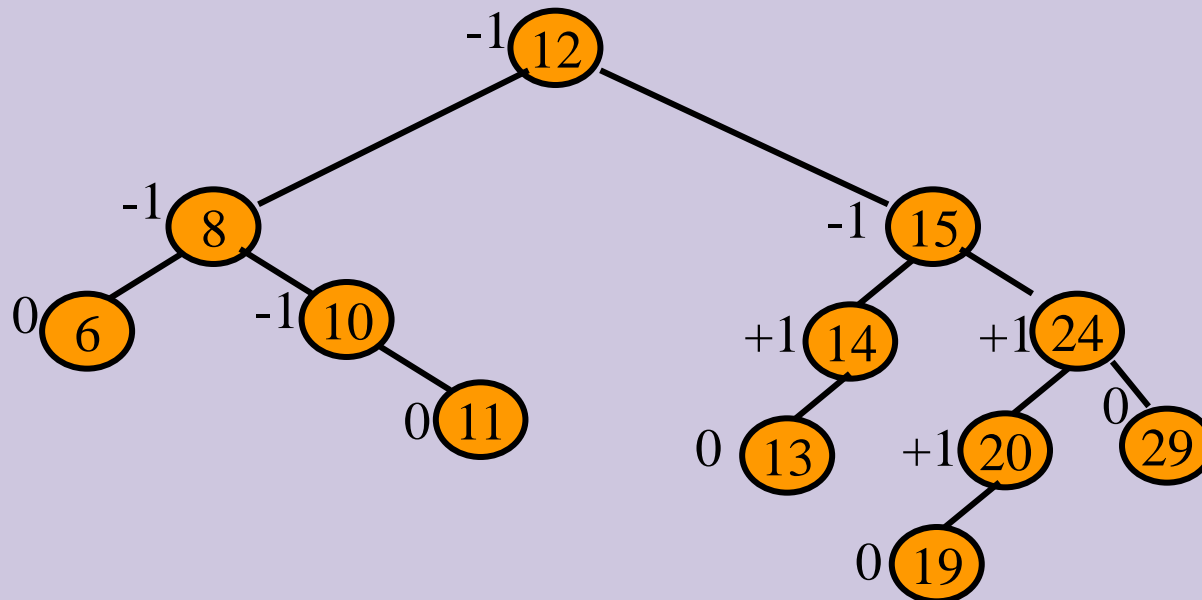


מצד שמאל של כל צומת מסומן גורם האיזון.

אחרי ההכנסה של 18 גורם האיזון מופר על מסלול ההכנסה.

אבחנות

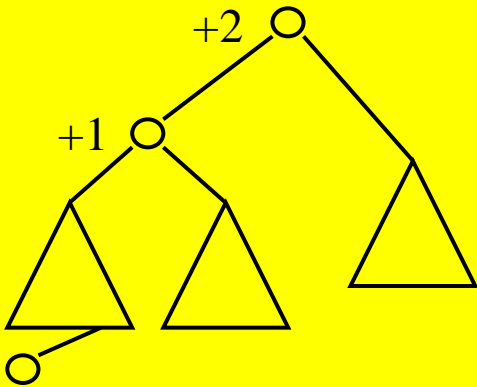
1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל-2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.
3. גורם האיזון לא יכול להיות גדול מ-2 בערכו המוחלט כי בכל הכנסה/הוצאה הוא משתנה ב-1 לכל היותר.
4. גלגול – פעולה המתבצעת על צומת שהופר בו האיזון על מנת להחזירו לתחום המותר $[-1 \dots 1]$.



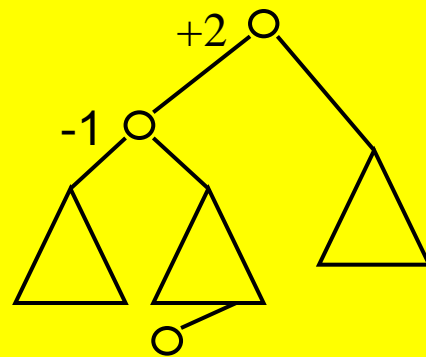
סוגי הגלגולים

סוג הגלגול, כלומר הדרך לתקן חוסר איזון בצומת, תלוי בצורה בה האיזון מופר.
נתן לסווג חוסר איזון בארבע קטגוריות שונות המכסות את כל המקרים.

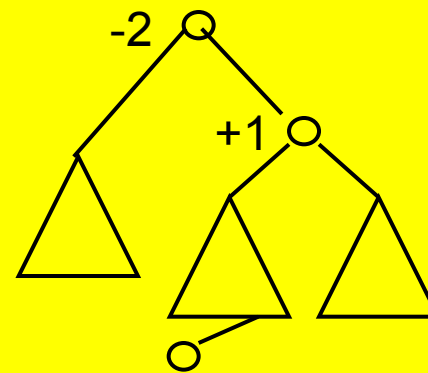
גלגול LL



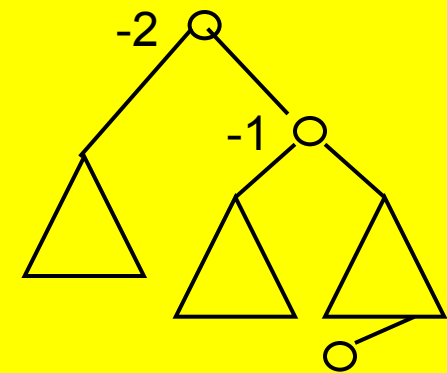
גלגול LR



גלגול RL

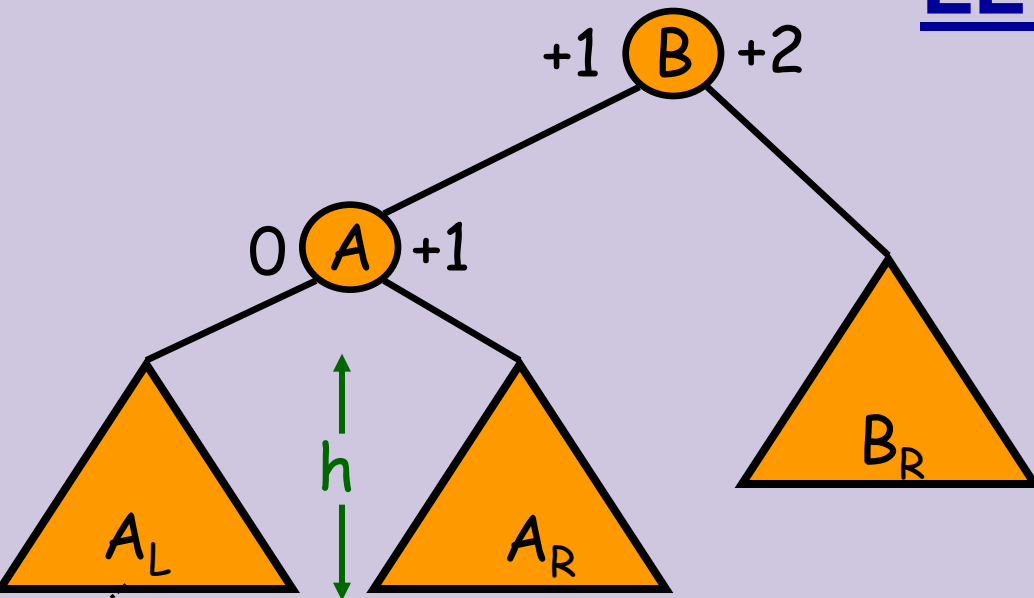


גלגול RR



הגלגול המתאים	בבן הימני v_R	בבן השמאלי v_L	בשורש v
LL		$BF(v_L) = 1$	$BF(v) = 2$
LR		$BF(v_L) = -1$	$BF(v) = 2$
RR	$BF(v_R) = -1$		$BF(v) = -2$
RL	$BF(v_R) = 1$		$BF(v) = -2$

גלגול LL

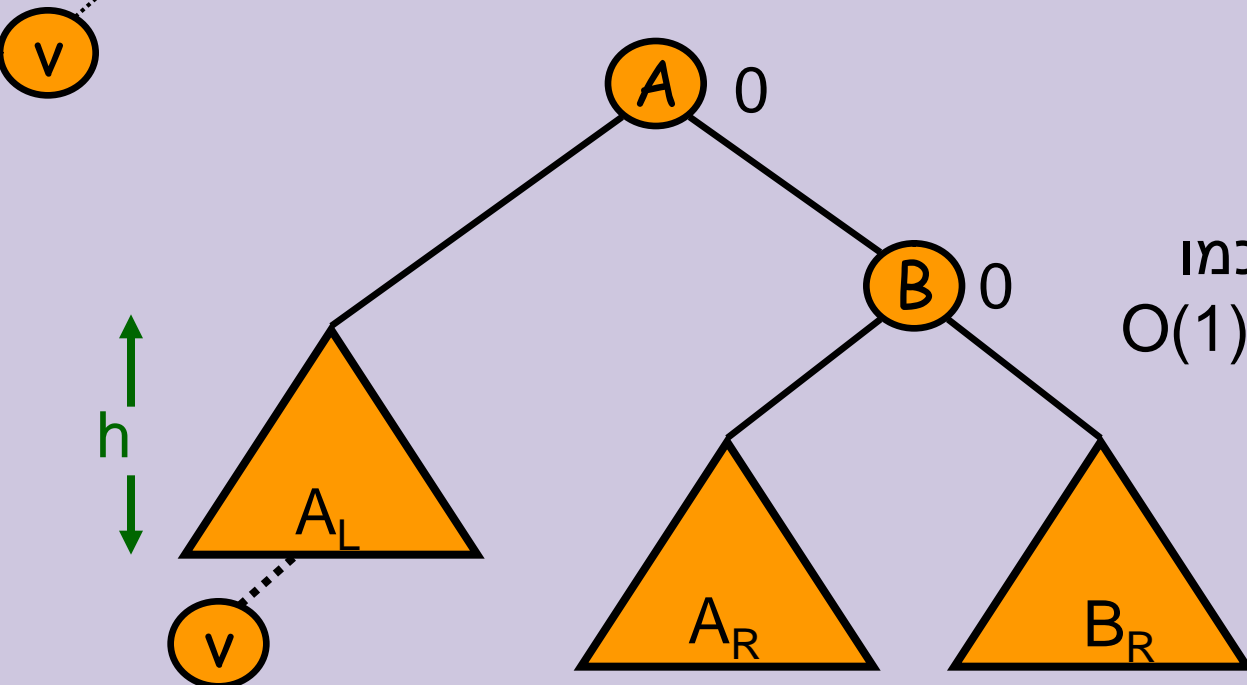


לפני הכנסת v : גובה העץ הוא $h + 2$.

הוכנס צומת v שהגדיל את גובה A_L ל- $h + 1$.

מצד ימין של הצמתים מסומנים
גורמי האיזון שהשתנו.

גלגול LL: יעביר את A לשורש

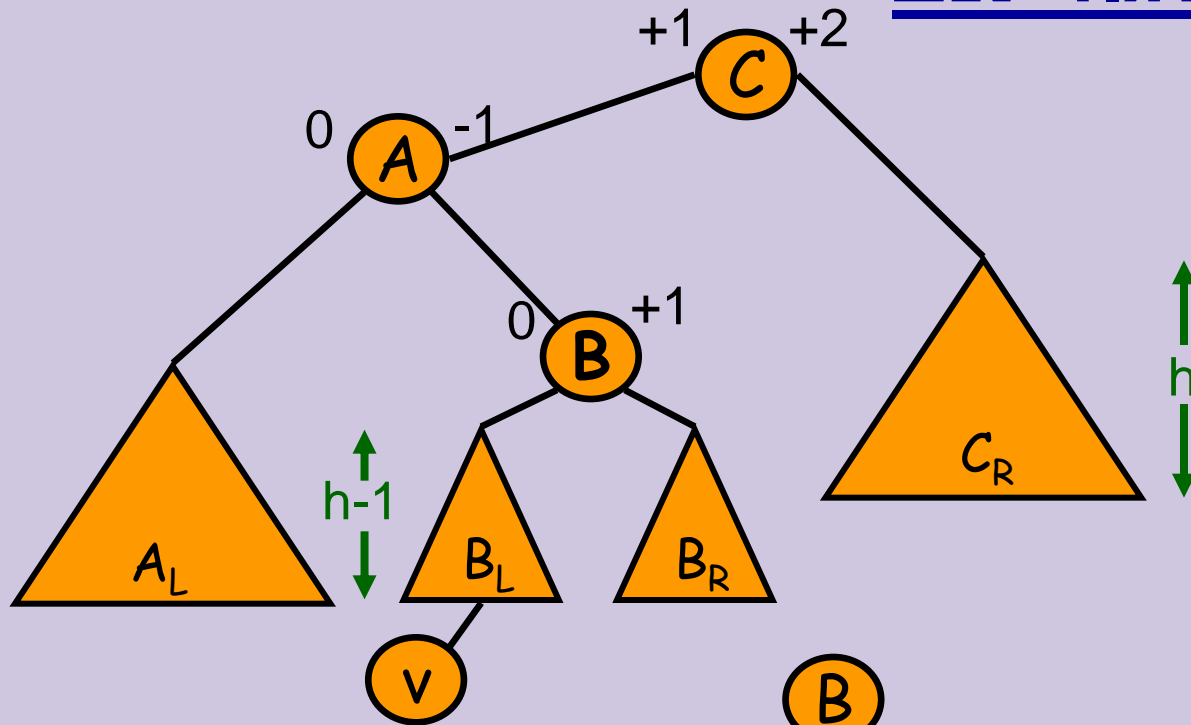


אחרי הגלגול:

גובה העץ לאחר הגלגול הוא $h + 2$, כמו
לפני ההכנסה. השורש מאוזן. שינינו $O(1)$
מצביעים ולכן זמן הגלגול $O(1)$.

LR גלגול

לפני הכנסת איבר v:

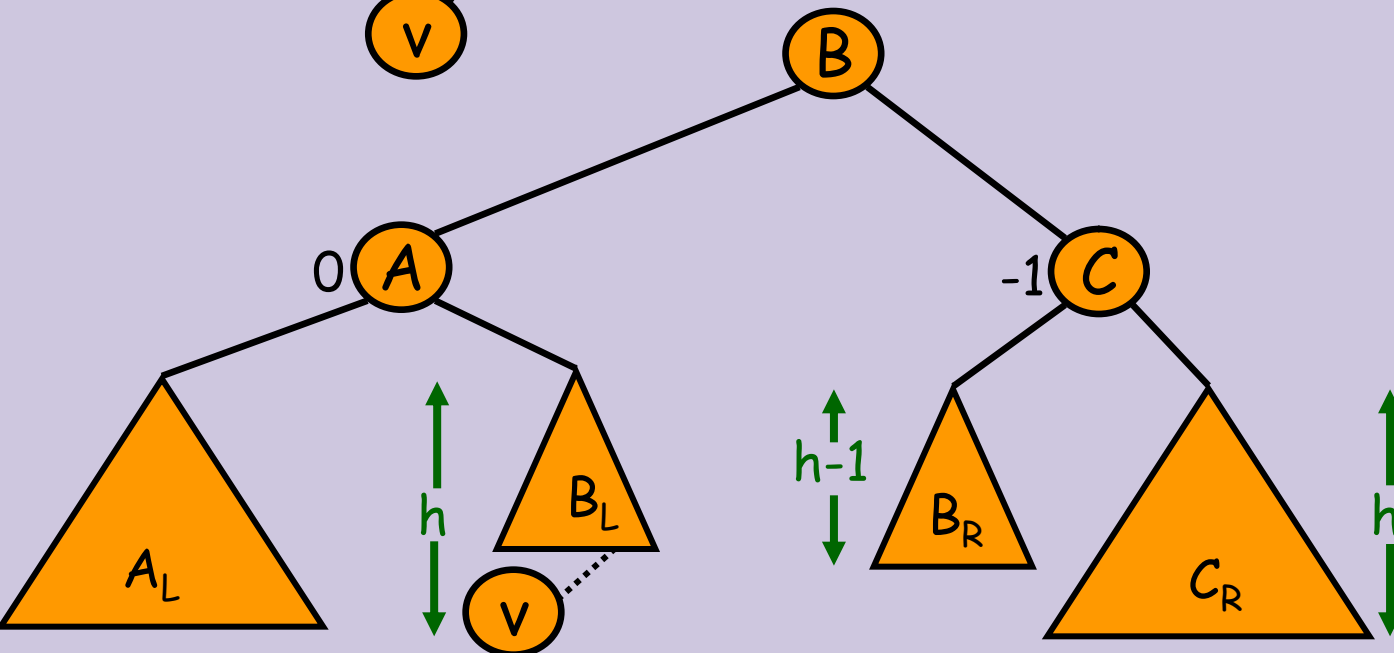


הוכנס איבר ל- B_L שגרם לו להעלות את גובהו ל- h .

גלגול LR:

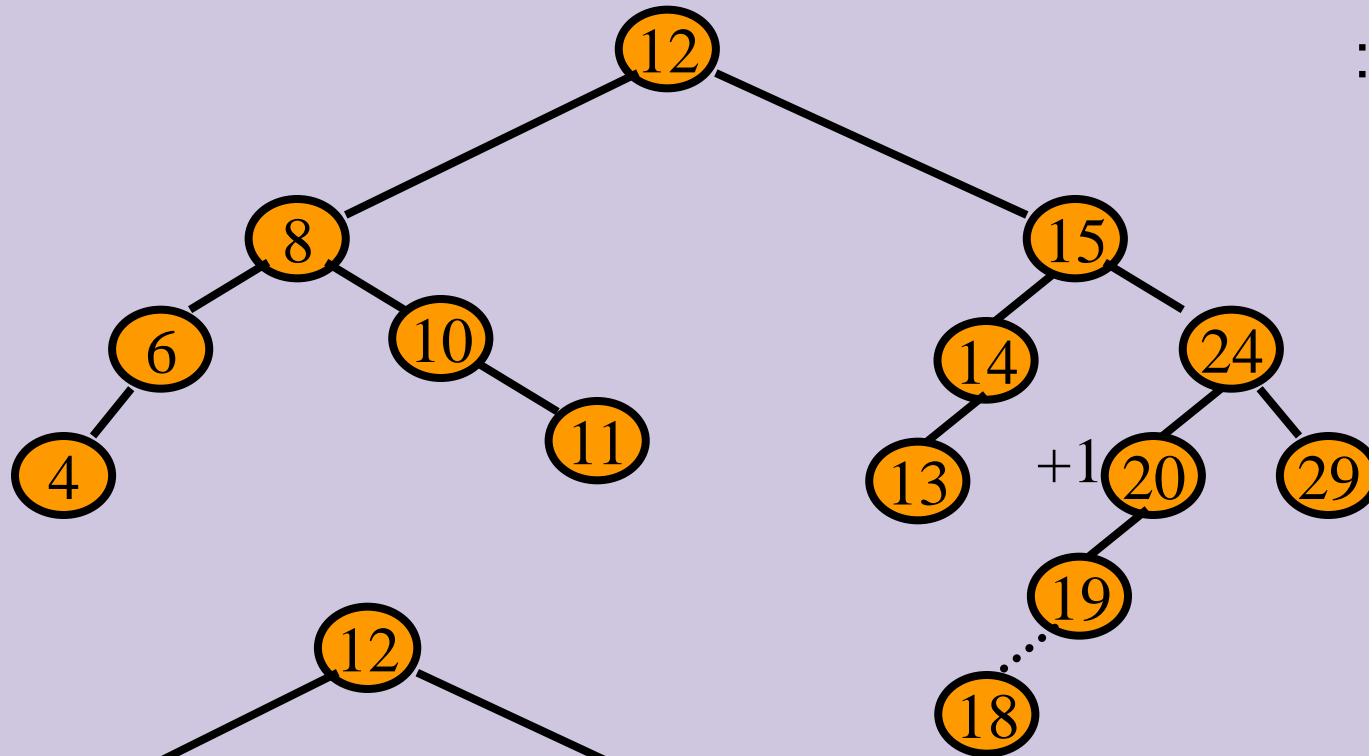
גובה העץ אחרי הגלגול הוא $h + 2$, כמו לפני ההכנסה.

שינינו $O(1)$ מצביעים ולכן זמן הגלגול $O(1)$.

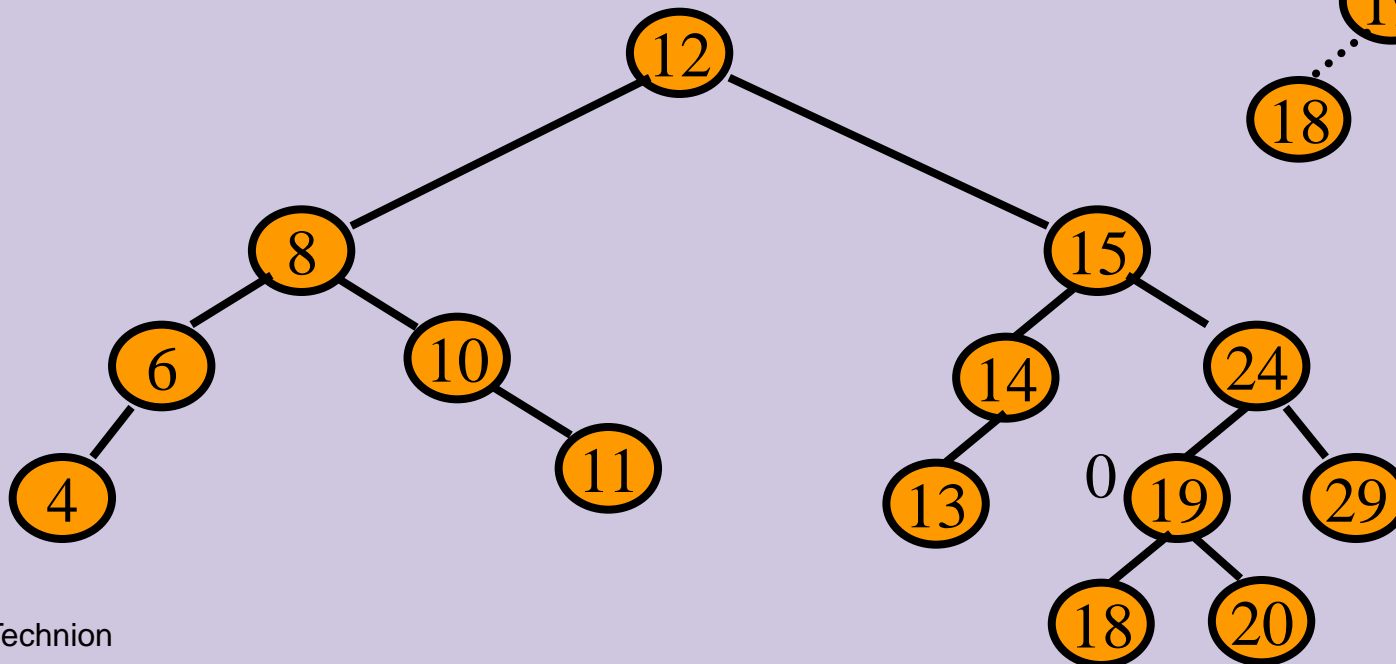


דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

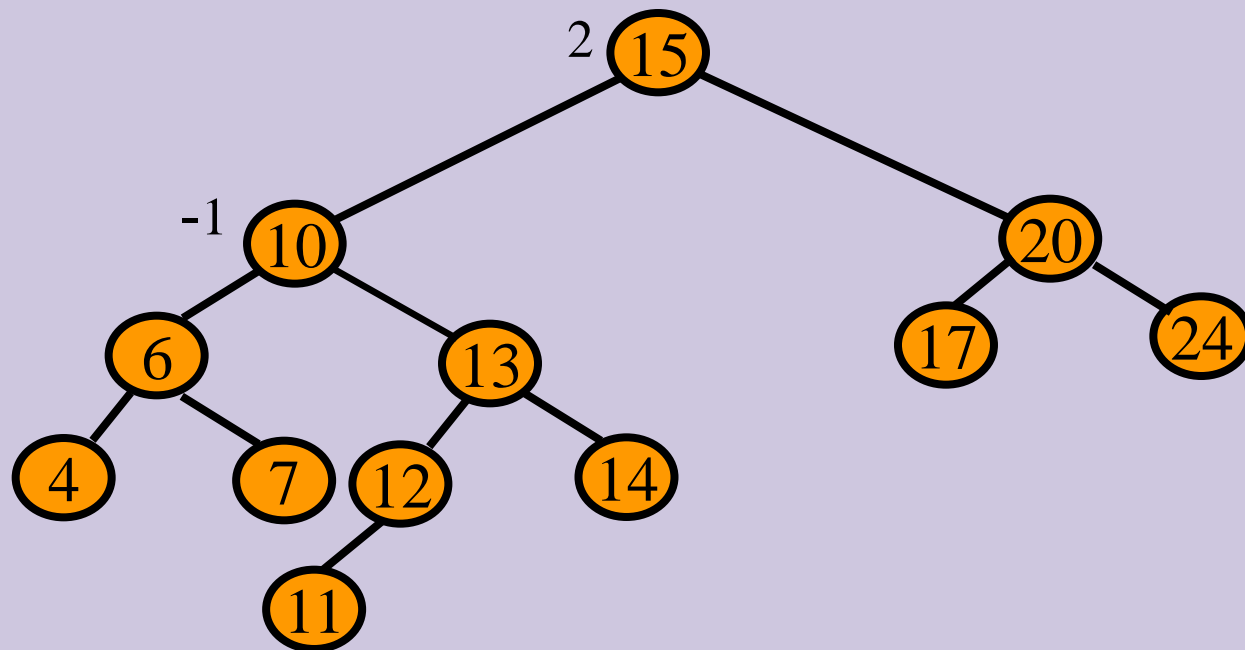
הוסף 18:



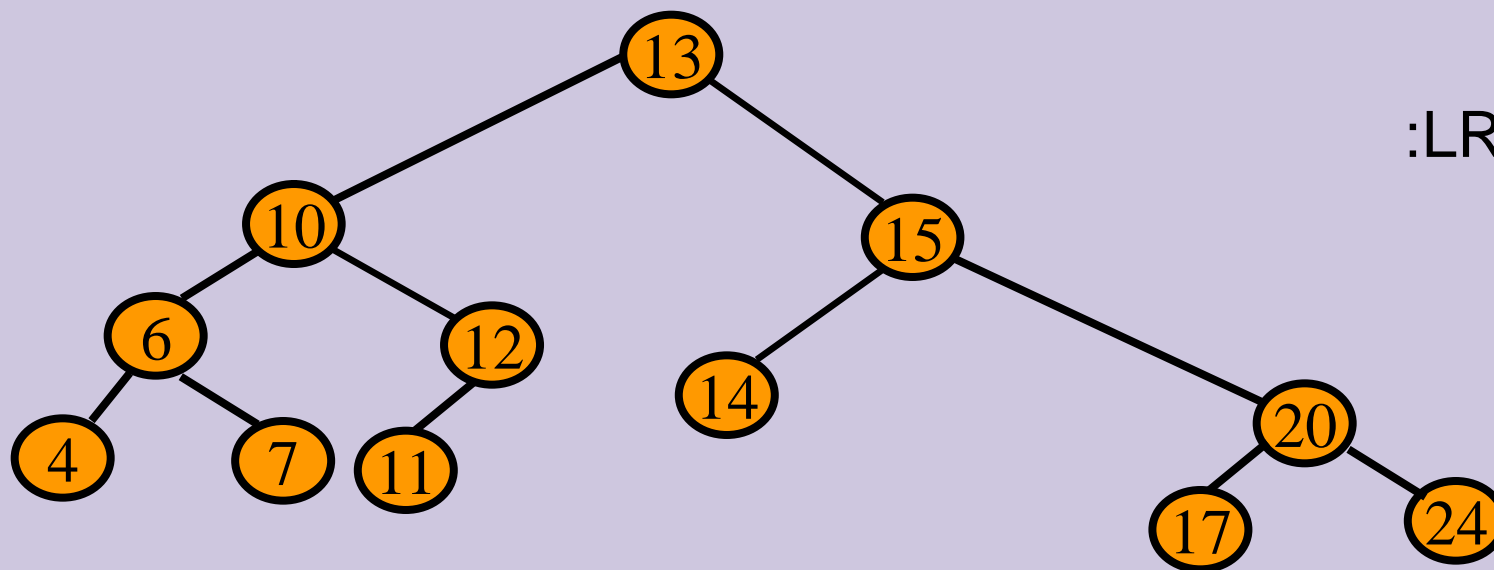
לאחר גלגול LL:



דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL



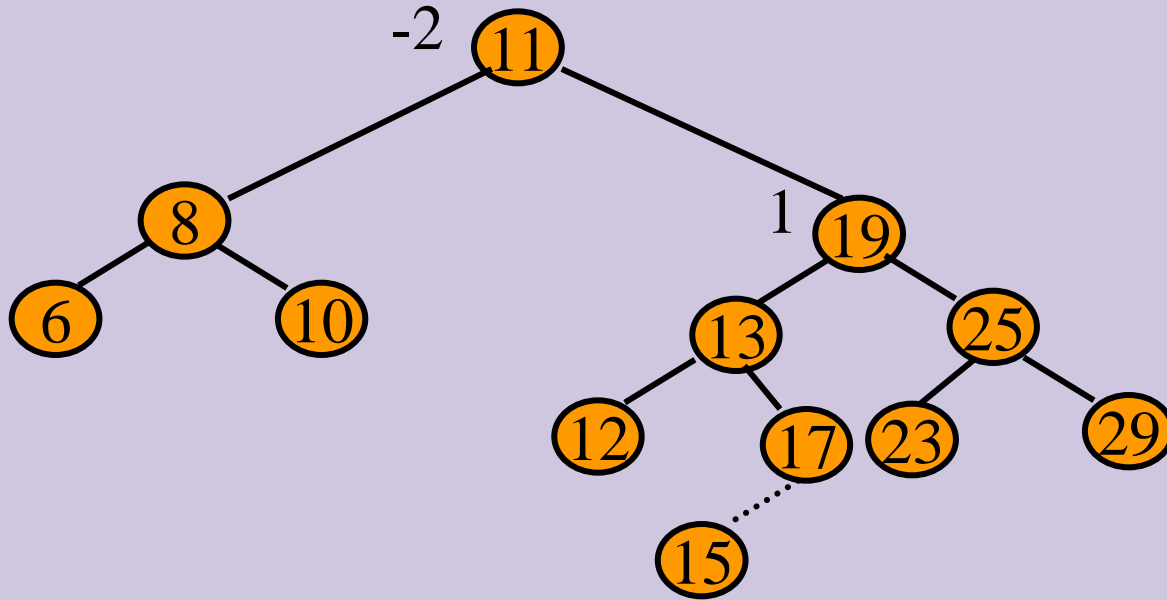
הוסף 11 :



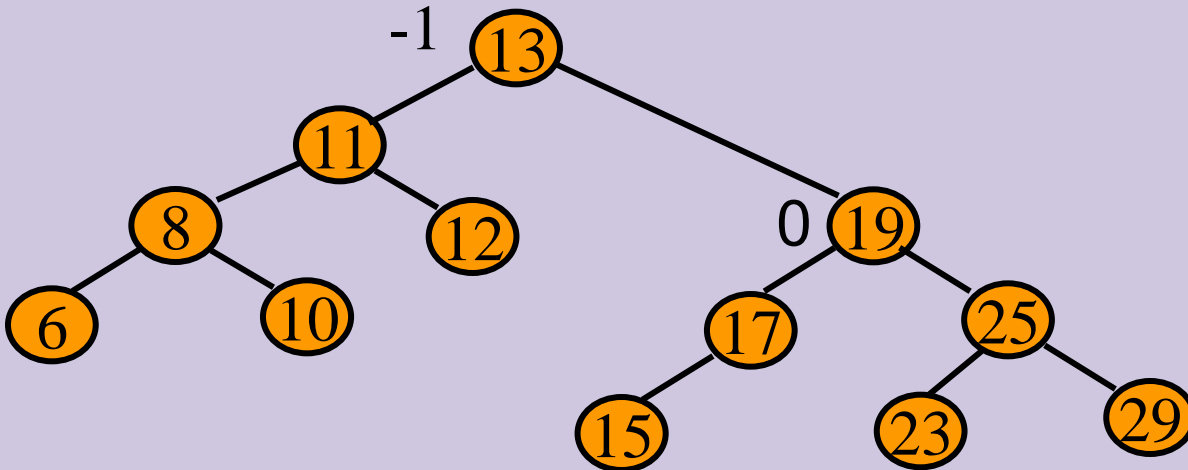
לאחר גלגול LR :

דוגמא להכנסת ערך X לעץ AVL

הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)



לאחר גלגול RL:



אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.

$$2. \quad h(v) = 0$$

3. כל עוד $v \neq \text{root}$ בצע:

$$4. \quad p = \text{parent}(v)$$

5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.

$$6. \quad h(p) = h(v) + 1$$

7. אם ב-p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.

$$8. \quad \text{אחרת} \quad v = p$$

איך נחשב את $\text{parent}(v)$?

למשל, נוציא אותו ממחסנית בה נמצאים כל הצמתים על המסלול מהשורש ועד v.

זמן ההכנסה לעץ AVL

כיוון שהצומת בו עושים גלגול לא משנה את גובהו, מבצעים רק גלגול אחד.

מציאת המקום הדרוש להכנסה $O(h)$

הוספת הצומת $O(1)$

מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(h)$ (אם מופר)

$O(1)$ תיקון האיזון

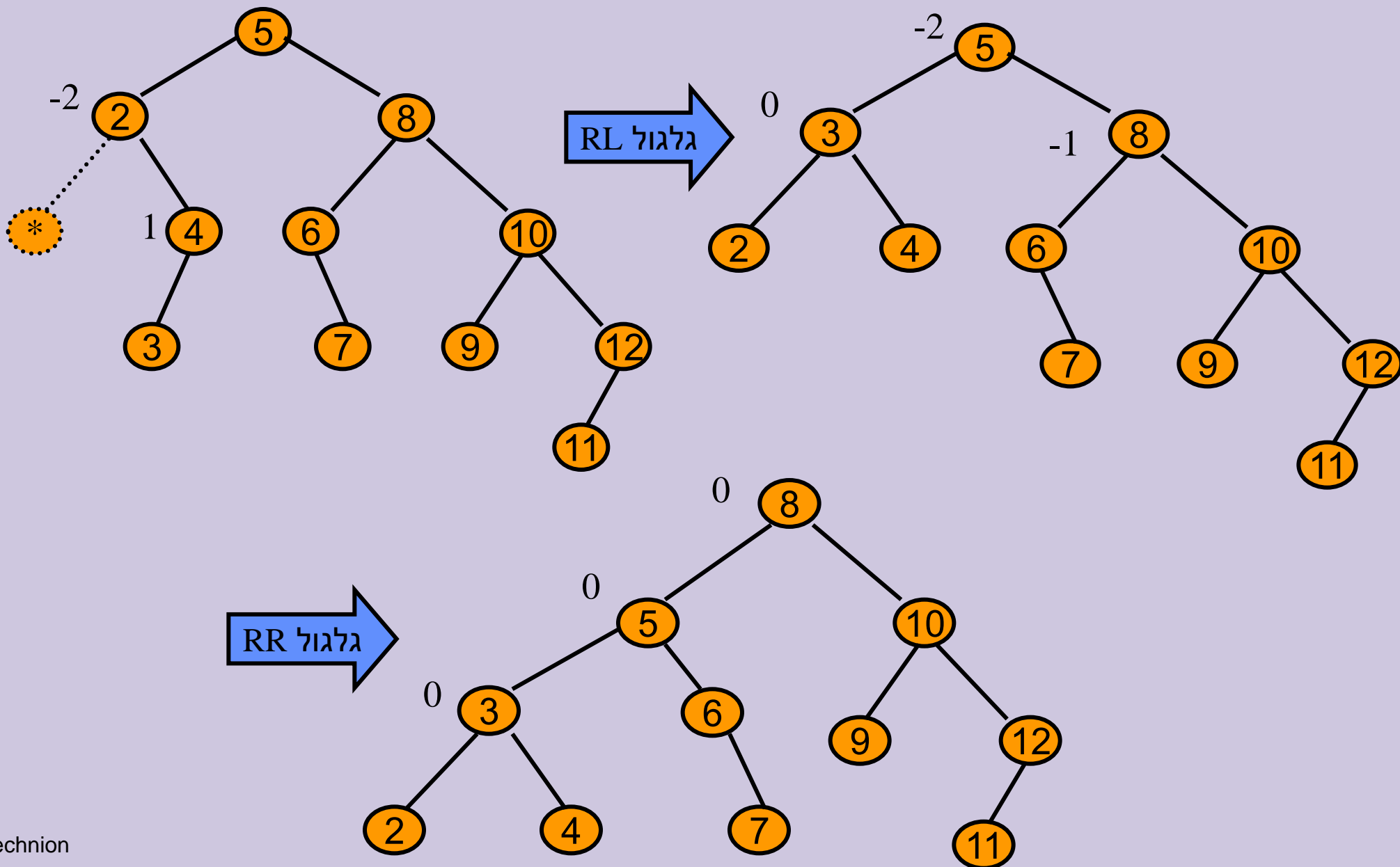
$O(h) = O(\log n)$ סה"כ

אלגוריתם הוצאה

- הוצא צומת v כפי שהפעולה מתבצעת בעץ חיפוש בינרי.
- תקן את גורמי האיזון בצורה הבאה. לכל צומת v לאורך המסלול החל מלמטה ועד לשורש בצע:
 - עדכן את $BF(v)$
 - אם $|BF(v)| = 2$, בצע גלגול והמשך כלפי מעלה.
 - אם גובה תת העץ ששורשו v לא השתנה, סיים.
 - אם גובה תת העץ השתנה ו- $BF(v)$ תקין, המשך כלפי מעלה.

בהוצאה יתכן יותר מגלגול אחד.

דוגמא להוצאה מעץ AVL



זמן ההוצאה מעץ AVL

$O(h)$ מציאת המקום הדרוש להוצאה

מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(h)$ (אם מופר)

$O(h)$ תיקון האיזון

(לכל היותר פעם בכל רמה)

$O(h) = O(\log n)$ סה"כ

עצי AVL מאפשרים חיפוש, הכנסה, הוצאה בזמן $O(\log n)$