<u>83-116, תרגיל 4:</u>

תשובה לשאלה על יחסים

$R\cup S$ איננו בהכרח יחס שקילות. קחו למשל $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ ו $S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$. במקרה זה $R\cup S$ איננו טרנזיטיבי משום ש $(1,2)\in R\cup S$ וגם $(2,3)\in R\cup S$ אך $(1,3)\notin R\cup S$.

$(A\times A)\setminus R$ תמיד איננו יחס שקילות, משום שהוא אנטי-רפלקסיבי (כל איבר לא מתייחס לעצמו).

$(A\times A)\setminus R\cup I_A$ איננו בהכרח יחס שקילות משום שאיננו בהכרח טרנזיטיבי. קחו למשל $A=\{1,2,3\}$ ו $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. במקרה זה $(1,3)\in(A\times A)\setminus R\cup I_A$ וגם $(3,2)\in(A\times A)\setminus R\cup I_A$ אבל $(1,2)\notin(A\times A)\setminus R\cup I_A$.

$R\setminus S$ איננו יחס שקילות משום שהוא אנטי רפלקסיבי.

1.

יהיו A, B קבוצות לא ריקות.

א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $g:A\to A\times B$.

ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $h:A\times B\to B\times B$

א.

$$B\neq\phi\Rightarrow\exists b\in B$$

נגדיר

$$f(x)=(x,b)$$

$$f(a)=f(c)\Rightarrow(a,b)=(c,b)\Rightarrow a=c$$

ב. נגדיר

$$h(x,y)=(f(x),y),$$

$$h(x,y)=h(v,u)\Rightarrow(f(x),y)=(f(v),u)\Rightarrow f(x)=f(v)\wedge y=u\Rightarrow\underset{\text{כי } f \text{ 1:1}}{x=v}\quad\wedge\quad u=y$$

2.

ציינו לגבי כל אחת מהבאים האם היא פונקציה, חח"ע, על, הפיכה (חח"ע ועל). הוכיחו את תשובותיכם.

א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ \ f(n)=|n|$.

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x^3$.

ג. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=2^x$.

א. $\neg\exists n\in N: f(0)=n\Rightarrow$ לא פונקציה

ב. $\forall x\in R \quad x^3\in R\Rightarrow$ פונקציה

$f(a)=f(b)\Rightarrow a^3=b^3\Rightarrow a=b\Rightarrow 1{:}1$

$\forall y\in R \quad \sqrt[3]{y}\in R\Rightarrow \exists x\in R: \quad \sqrt[3]{y}=x\Rightarrow f(x)=x^3=y\Rightarrow$ על $\Rightarrow$ הפיכה

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

$f:Q\to R\,|\,\forall n\in Q \quad f(n)=2^n$

ג. $f(n)=f(m)$: נניח $\Rightarrow 2^n=2^m\Rightarrow n=m\Rightarrow$ f חח"ע

$-3\in R:\neg\exists n\in Q\,|\,2^n=-3\Rightarrow$ f לא על

.3

תהי $f: A\to B$ פונקציה ונניח $C_1,C_2\subseteq A$ ו-$D_1,D_2\subseteq B$. הוכיחו או הפריכו:

א. $f^{-1}(D_1\cup D_2)=f^{-1}(D_1)\cup f^{-1}(D_2)$

ב. $f^{-1}(D_1\cap D_2)=f^{-1}(D_1)\cap f^{-1}(D_2)$

ג. $f\left(C_1^C\right)=f(C_1)^C$ (עבור $X\subseteq A$, $X^C=A\setminus X$ ועבור $Y\subseteq B$, $Y^C=B\setminus Y$)

ד. $f^{-1}\left(D_1^C\right)=f^{-1}(D_1)^C$

א. הוכחה:

$$x\in f^{-1}\left[D_1\cup D_2\right]\leftrightarrow f(x)\in D_1\cup D_2\leftrightarrow f(x)\in D_1\vee f(x)\in D_2\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x\in f^{-1}\left[D_1\right]\vee x\in f^{-1}\left[D_2\right]\leftrightarrow x\in f^{-1}\left[D_1\right]\cup f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות. (הערה הסימון $\leftrightarrow$ אומר אם"ם ואינו חלק מהפסוקים.)

ב. הוכחה:

$$x\in f^{-1}\left[D_1\cap D_2\right]\leftrightarrow f(x)\in D_1\cap D_2\leftrightarrow f(x)\in D_1\wedge f(x)\in D_2\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x\in f^{-1}\left[D_1\right]\wedge x\in f^{-1}\left[D_2\right]\leftrightarrow x\in f^{-1}\left[D_1\right]\cap f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

ג. דוגמא נגדית:

נניח ש $X=\{1,2\},Y=\{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f:X\to Y$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $f(x)=x$ נגדיר $C_1=\{1\}$ ואז $C_1^C=\{2\}$. אזי $f\left(C_1^C\right)=\{2\}\neq\{2,3\}=\left(f(C_1)\right)^C$.

ד. הוכחה:

$$x\in f^{-1}\left(D_1^C\right)\Leftrightarrow f(x)\in D_1^C\Leftrightarrow f(x)\notin D_1\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(D_1)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(D_1)^C$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

.4

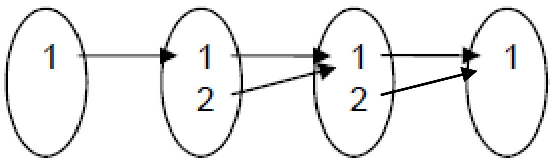
תהיינה A,B,C,D קבוצות ו-$f:A\to B,\ \ g:B\to C,\ \ h:C\to D$. הוכיחו או הפריכו:

1. $h\circ g\circ f$ הפיכה גורר ש-g חח"ע או g על.
2. $h\circ g\circ f$ חח"ע ו-$h\circ g$ חח"ע גורר ש-$g\circ f$ חח"ע
3. $h\circ g\circ f$ על ו-$h\circ g$ על גורר ש-$g\circ f$ על
4. $h\circ g\circ f$ על ו-$g\circ f$ על גורר ש-$h\circ g$ על.
5. $g\circ f$ הפיכה ו-$h\circ g$ הפיכה גורר ש-g הפיכה
6. $g\circ f$ הפיכה ו-$h\circ g$ הפיכה גורר ש-$h\circ g\circ f$ הפיכה

פתרון

1. דוגמא נגדית: נבחר $A=\{1\}, B=\{1,2\}, C=\{1,2\}, D=\{1\}$ ונגדיר את f,g,h ע"י:
$f(x)=1$ לכל $x\in A$, $g(x)=1$ לכל $x\in B$, $h(x)=1$ לכל $x\in C$.
אזי $h\left(g\big(f(1)\big)\right)=1$ ולכן $h\circ g\circ f$ על. מצד שני, ב-A יש רק איבר אחד ולכן $h\circ g\circ f$ חח"ע.
לכן, $h\circ g\circ f$ הפיכה. אבל g לא חח"ע ולא על כי $g(1)=1=g(2)$ ואין $x\in B$ כך ש-$g(x)=2\in C$.

ציור של הדוגמא: [לא חובה לצייר בבוחן או במבחן. זה רק כדי שתבינו.]



2. הוכחה: $h\circ g\circ f=(h\circ g)\circ f$ חח"ע ולכן f חח"ע (לפי תכונות שראינו בשיעור). $h\circ g$ חח"ע ולכן g חח"ע (לפי אותה תכונה). לכן, $g\circ f$ חח"ע כהרכבה של פונקציות חח"ע. **משל.**

3. דוגמא נגדית: הדוגמא הנגדית של סעיף 1 טובה גם כאן. ב-D יש רק איבר אחד ולכן $h\circ g\circ f$ ו-$h\circ g$ על. אבל $g\circ f$ לא על כי ל-$2\in C$ אין מקור (באמת, $(g\circ f)(1)=1$).

4. הוכחה: $h\circ g\circ f=h\circ(g\circ f)$ היא על ולכן h על (לפי תכונה שראינו בשיעור). $g\circ f$ על ולכן g על (לפי אותה תכונה). לכן, $h\circ g$ על כהרכבה של שתי פונקציות שהן על. **משל.**

5. הוכחה: $g\circ f$ הפיכה, לכן היא על ולכן גם g על. $h\circ g$ הפיכה, לכן היא חח"ע ולכן גם g חח"ע. הראינו ש-g חח"ע ועל ולכן g הפיכה. **משל.**

6. הוכחה: הראינו בסעיף 5 ש-g הפיכה. לכן, g^{-1} קיימת והיא גם הפיכה. הרכבת פונקציות הפיכות היא גם הפיכה ולכן $(g\circ f)\circ g^{-1}=f$ ... $f=id_B\circ f=(g^{-1}\circ g)\circ f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ הפיכה (נתון ש-$g\circ f$ הפיכה) ו-$h=h\circ id_C=h\circ(g\circ g^{-1})=(h\circ g)\circ g^{-1}$ הפיכה (נתון ש-$h\circ g$ הפיכה). קיבלנו ש-f,g,h הפיכות ולכן $h\circ g\circ f$ הפיכה כהרכבת פונקציות הפיכות. **משל.**

.5

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר $f: P(A)\to P(B)$ ע"י $f(X)=X\cap B$.

1. הוכיחו כי f חח"ע אם ורק אם $A\subseteq B$.
2. הוכיחו כי f על אם ורק אם $B\subseteq A$.

פיתרון

הוכחת 1: כוון א: נניח כי f חח"ע. יהי $x \in A$, אזי $\{x\}, \phi \in P(A)$. היות ו-f חח"ע אז $\phi \cap B = f(\phi) \neq f(\{x\}) = \{x\} \cap B$ (כי $\{x\} \neq \phi$). לכן, בהכרח קיים $y \in \{x\} \cap B$ (אחרת $\{x\} \cap B$ קבוצה ריקה). בפרט, $y \in \{x\}$ ולכן $y = x$. אבל $y \in B$ ולכן $x \in B$. כדרוש.

כוון ב: נניח $A \subseteq B$ ונניח ש-$f(X) = f(Y)$ עבור $X, Y \in P(A)$. אזי, $X \subseteq A \subseteq B$ ולכן $f(X) = X \cap B = X$. באותו אופן $f(Y) = Y$. לכן, $X = f(X) = f(Y) = Y$, כדרוש.

משל.

הוכחת 2: כוון א: נניח כי f על. יהי $x \in B$, אזי $\{x\} \in P(B)$ ולכן קיימת $X \in P(A)$ כך ש-$f(X) = X \cap B = \{x\}$. לכן, $x \in X \subseteq A$ וקיבלנו $x \in A$, כדרוש.

כוון ב: נניח $A \subseteq B$ ותהי $X \in P(B)$. אזי $X \subseteq B \subseteq A$ ולכן $X \in P(A)$. זה אומר ש-f מוגדרת על X. [הערה: חשוב לבדוק שהאיברים שאנו מציבים ב-f הם תתי קבוצות של A. אם זה לא ברור, חובה להוכיח זאת!] כעת, $f(X) = X \cap B = X$ ולכן ל-X יש מקור. כדרוש.

משל.