תרגיל בית 10

שאלה 1

תהי X קבוצה ו-R יחס סדר על X, אזי קיים יחס סדר מלא S על X שמכיל את R.

[רמז: הלמה של צורן]

פיתרון: נביט בשרשרת $\{R_i\}_{i\in I}$ לא ריקה של יחסי סדר חלקיים על X [אברי השרשרת סדורים לפי הכלה] המכילים את R. נביט ב $M=\bigcup_{i\in I} R_i$. נוכיח כי M יחס סדר חלקי על X. לכל $x\in X$, $(x,x)\in R\subseteq M$ ולכן מתקיימת רפלקסיביות. אם $(x,y),(y,x)\in M$ אז קיימים $i,j\in I$ שעבורו $(x,y)\in R_i$ ו $(y,x)\in R_j$. בה"כ ניתן להניח ש ובגלל ש $R_i\supseteq R_j$, ואז $(x,y),(y,x)\in R_i$. בגלל ש R_i יחס אנטי-סימטרי, מתקיים $x=y$, ולכן M אנטי-סימטרי. אם $(x,y),(y,z)\in M$ אז קיימים $i,j\in I$ כך ש $(x,y)\in R_i$ ו $(y,z)\in R_j$. בה"כ $R_i\supseteq R_j$ ולכן $(x,y),(y,z)\in R_i$ ובגלל ש R_i יחס טרנזיטיבי, מתקיים $(x,z)\in R_i$ ולכן $(x,z)\in M$, ולכן מתקיימת טרנזיטיביות.

מכיוון שלכל שרשרת של יחסי סדר המכילים את R קיים יחס סדר המכיל את R שמהווה חסם מלעיל לשרשרת, קיים לפי הלמה של צורן איבר מקסימאלי, כלומר יחס סדר S על X המכיל את R שמקסימאלי ביחס להכלה.

נניח בשלילה כי S אינו יחס סדר מלא. אז קיימים שני איברים שונים $x,y\in X$ כך ש $(x,y),(y,x)\notin S$. נבנה יחס סדר חדש באופן הבא:
$T=S\cup\{(x,t):(y,t)\in S\}\cup\{(t,y):(t,x)\in S\}$. לכל יחס (x,t) שהוספנו לא יכול להיות שכבר היה $(t,x)\in S$ כי הוספנו את (x,t) בתנאי ש $(y,t)\in S$ ואם זה מתקיים אז בגלל ש S טרנזיטיבי, $(y,x)\in S$, והנחנו שזהו לא המצב. באופן דומה, לכל יחס (t,y) שהוספנו לא מתקיים $(y,t)\in S$. לכן T נשאר אנטי-סימטרי. לפי ההגדרה שלו, ברור שהוא גם טרנזיטיבי ורפלקסיבי, ולכן הוא יחס סדר חלקי. אולם הוא מכיל ממש את S, וזו סתירה למקסימאליות של S. לכן S יחס סדר מלא.

שאלה 2

תהי X קבוצה, $Y\subseteq X$ ו-R יחס סדר מלא על Y, אזי קיים יחס סדר מלא על X המכיל את R.

[רמז: הלמה של צורן]

פיתרון: ניתן להרחיב את R להיות יחס סדר חלקי על X ע"י הוספת הזוגות (x,x) לכל $x\in X\setminus Y$, ואז לפי שאלה 1 קיים יחס סדר מלא על X שמכיל את ההרחבה של R, ובפרט את R עצמו.

שאלה 3

תהי A קבוצה אינסופית, אזי קיימת חלוקה של A בה כל הקבוצות הן מעוצמה $\aleph_0$.

פיתרון: נביט בקבוצות של תתי-קבוצות זרות של A מעוצמה $\aleph_0$ עם יחס ההכלה. תהי שרשרת של קבוצות כאלה. $P=\bigcup_{i\in I} P_i$ אף היא קבוצה של תתי-קבוצות זרות מעוצמה $\aleph_0$. לכן לפי הלמה של צורן ישנה קבוצה Q של תתי-קבוצות של A מעוצמה $\aleph_0$ שהיא מקסימאלית ביחס להכלה. אם $A\setminus\bigcup_{B\in Q} B$ אינסופית אזי אפשר לבחור לה תת-קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ואז להוסיף אותה כאיבר ל Q וזה סותר את המקסימאליות של Q. לכן $A\setminus\bigcup_{B\in Q} B$ סופית, ולכן אפשר להוסיף את איבריה לאחת מהקבוצות ב Q, ואז Q הופכת לחלוקה של A לקבוצות מעוצמה $\aleph_0$.

שאלה 4

הוכיחו כי $|A|+|A|=|A|$.

[רמז: בעזרת שאלה 3 ובנייה מפורשת למדוע $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$]

פיתרון: אנחנו יודעים ש $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ בגלל שעוצמת הזוגיים ועוד עוצמת האי-זוגיים שווה לעוצמת השלמים, וכולם מעוצמה $\aleph_0$. כעת, ל A יש חלוקה לתתי-קבוצות מעוצמה $\aleph_0$. כל תת-קבוצה כזאת מתחלקת בהתאם לשתי תתי-קבוצות מעוצמה $\aleph_0$, ואז אפשר לבחור איבר אחד מכל זוג כזה ולאחד אותם חזרה לקבוצה מעוצמה $|A|$ ובמקביל לעשות את אותו הדבר עם האיברים השניים בזוגות.

שאלה 5

תהי A קבוצה אינסופית, אזי קיים יחס שקילות על A בו כל מחלקות השקילות הן בנות 2 איברים.

[רמז: שאלה קודמת.]

פיתרון: מתקיים $|A\times\{0,1\}|=|A|+|A|=|A|$. לכן קיימת פונקצייה חח"ע ועל $f:A\times\{0,1\}\to A$. קיימת אם כך חלוקה של A לתת הקבוצות $\{f(a,0),f(a,1)\}$ שהן מגודל 2. הקבוצות הן מגודל 2 וזרות בגלל שהפונקציה חח"ע וזה מכסה את כל A בגלל שהפונקציה על. אם יש חלוקה כזאת אז גם קיים יחס שקילות שאלו מחלקות השקילות שלו.