

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 12

שאלה 1

תהי E/F הרחבת שדות ויהיו L, K שדות ביניים כך ש- $L \cap K = F$. נניח כי K/F ו- L/F הן הרחבות גלואה ממימד סופי. הראו כי KL/F גלואה ו- $Gal(KL/F) \cong Gal(K/F) \times Gal(L/F)$.

שאלה 2

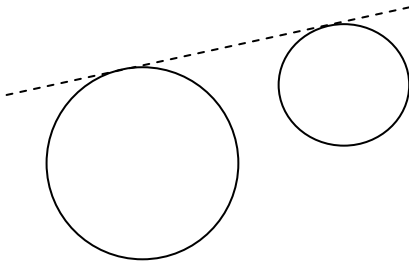
- תהי K/F הרחבת גלואה ממימד סופי. יהי f פולינום אי פריק מעל F ויהי $g \in K[x]$ מחלק ראשוני של f כפולינום מעל K . הוכיחו כי $\deg g \mid \deg f$. (המלצה: התבוננו בפולינומים $\{\sigma g \mid \sigma \in Gal(K/F)\}$).
- יהי F שדה ויהיו $F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_r$ שדות כך ש- $[L_i: L_{i-1}] = 2$ לכל $0 < i \leq r$. נניח ש- L_r/F ספרבילית ויהי E סגור גלואה של L_r מעל F . הוכיחו כי $[E:F]$ הוא חזקת 2.
- הראו כי אם E/F היא הרחבת גלואה ו- $[E:F]$ היא חזקת 2 אז קיימים שדות $F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_r = E$ כך ש- $[L_i: L_{i-1}] = 2$ לכל $0 < i \leq r$. [רמז: משפט מתורת החבורות קובע שאם q ראשוני, אז לכל חבורה בגודל q^n (חבורת- q) יש מרכז לא טרוויאלי (כלומר שונה מ- $\{e\}$)].

שאלה 3

- נתונים שני מעגלים במישור (ראו ציור). מרכזי המעגלים גם נתונים ורדיוס המעגל הראשון הוא 1. הוכיחו כי ניתן לבנות ע"י סרגל (ללא שנתות) ומחוגה משיק משותף לשני המעגלים (כמו בציור¹).

זהירות: רדיוס המעגל השני והמרחק בין מרכזי המעגלים לא חייבים להיות מספרים ברי בנייה.

אתם רשאים להשתמש בעובדות הבאות (שכנראה הוכחתם בהרצאה):



- אם אפשר לבנות את המרחק a אז אפשר לבנות מעגל ברדיוס a סביב כל נקודה שבניתם.

- אם אפשר לבנות את $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ אז אפשר לבנות את $a + b, a - b, ab, a^{-1}, \sqrt{a}$.

- אם אפשר לבנות את $a \in \mathbb{R}_{>0}$ אז אפשר לבנות את aq לכל $q \in \mathbb{Q}_{>0}$.

הערה: אין צורך להסביר איך לבנות את המשיק אלא רק להוכיח שאפשר לבנות אותו.

המלצה: נסו להביע גדלים שאתם צריכים כפונקציה של רדיוסי המעגלים והמרחק בין מרכזי המעגלים.

¹ יש עוד שלושה משיקים משותפים! אין צורך לבנות אותם.