משוואות דיפרנציאליות רגילות – תרגול 12

תרגיל: הוכח מיחסי הרקורסיה לפונקציות בסל "המותאמות" (modified)

(פונ' בסל מתואמות)

$$\begin{cases} I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) = 2I_n'(x) \\ I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x) \end{cases}$$

כי $I_n(x)$ מקיים את משוואת בסל "המותאמת". ז"א:

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) - (x^2+n^2) I_n(x) = 0$$

פתרון: הפרש הרקורסיות יתן:

$$2I_{n+1}(x) = 2I_n'(x) - \frac{2n}{x} I_n(x) \quad / \cdot \frac{x}{2}$$

$$(*) \quad x I_{n+1}(x) = x I_n'(x) - n I_n(x)$$

נגזור לפי x, ונקבל:

$$I_{n+1}(x) + x I_{n+1}'(x) = I_n'(x) + x I_n''(x) - n I_n'(x)$$

נקרב למשוואה שנרצה לקבל:

$$\Rightarrow x I_n''(x) + (1-n) I_n'(x) = I_{n+1}(x) + x I_{n+1}'(x)$$

נכפול ב x ונקבל

$$x^2 I_n''(x) + (1-n) x I_n'(x) = x I_{n+1}(x) + x^2 I_{n+1}'(x)$$

נוסיף למשוואה את משוואת (*) מוכפלת ב-n:

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) - n^2 I_n(x) = (1+n) x I_{n+1}(x) + x^2 I_{n+1}'(x)$$

כמעט סיימנו באגף שמאל, כעת נסתכל על סכום הרקורסיות:

$$2I_{n-1}(x) = 2I_n'(x) + \frac{2n}{x} I_n(x) \quad / \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 I_{n-1}(x) = x^2 I_n'(x) + n x I_n(x)$$

נעלה את n ב-1: $n-1 \longmapsto n$

$$x^2 I_n(x) = x^2 I_{n+1}'(x) + (n+1) x I_{n+1}(x)$$

אגף ימין כעת הוא בדיוק אגף ימין אותו עצרנו לפני סכום הרקורסיות, לכן נקבל:

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) - n^2 I_n(x) = x^2 I_n(x)$$

$$\blacksquare \quad \Rightarrow x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + (x^2 - n^2) I_n(x) = 0$$

תרגיל: הוכח את יחסי הרקורסיה לפונקציית בסל המותאמת מהייצוג האינטגרלי של פונקציית בסל:

$n \in \mathbb{Z}$

$x > 0$

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cdot\cos(n\theta)\,d\theta$$

<u>פתרון:</u> <u>נוכיח את הרקורסיה הראשונה:</u>

$$I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos((n-1)\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos((n+1)\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\left[\cos((n-1)\theta) + \cos((n+1)\theta)\right]d\theta = \text{(מזהויות טריגונומטריות)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\left[\cos n\theta\cos\theta + \cancel{\sin n\theta\sin\theta} + \cos n\theta\cos\theta - \cancel{\sin n\theta\sin\theta}\right]d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos n\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d}{dx}\left[e^{x\cos\theta}\cdot\cos n\theta\right]d\theta =$$

$$= 2\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta\right] \underset{\text{הייצוג האינטגרלי}}{=} 2\frac{d}{dx}I_n(x) = \boxed{2I_n'(x)}$$

<u>נוכיח את הרקורסיה השנייה:</u>

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos((n-1)\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos((n+1)\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\left[\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)\right]d\theta \overset{\text{מזהויות טריג'}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\sin n\theta\sin\theta\,d\theta$$

<u>חישוב עזר:</u>

$$\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\sin n\theta\right] = e^{x\cos\theta}\cdot(-x\sin\theta)\sin n\theta + e^{x\cos\theta}\cdot n\cos n\theta \qquad /\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\sin n\theta\right] = \boxed{e^{x\cos\theta}\sin n\theta\sin\theta} - \frac{n}{x}e^{x\cos\theta}\cos n\theta$$

2 וגל

לפי החישוב עבר נקבל:

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{ -\frac{1}{x}\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\sin n\theta\right] + \frac{n}{x}e^{x\cos\theta}\cos n\theta \right\} d\theta =$$

$$= -\frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\sin n\theta\right]d\theta + \frac{2n}{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta} =$$

מ׳ יסודי ש החשבון האינפ׳

$$= \cancelto{0}{-\frac{2}{\pi x} e^{x\cos\theta}\sin n\theta \Big|_0^\pi} + \frac{2n}{x}\cdot I_n(x) = \boxed{\frac{2n}{x}\cdot I_n(x)}$$

Laplace transform / התמרת לפלס

Pierre-Simon Laplace (צרפתי)

<u>הגדרה</u>: יהי $f(t)$ פונקציה המוגדרת בקרן $t\in(0,\infty)$

נגדיר פורמלית (לא בטוח שהאינטגרל יתכנס) באופן הבא:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

<u>סימונים נוספים</u>: $F(s),\ \mathcal{L}\{f(t)\},\ \mathcal{L}(f)$

<u>דוגמא</u>: אם $f(t)=1$

$$\mathcal{L}\{1\}(s)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty = \boxed{\frac{1}{s}}$$

רק עבור $s>0$.

סימון מקוצר להתמרת לפלס עבור פונ׳ $g(t),\ f(t),\ x(t)$ וכו׳

הוא איתה האות רק גדולה, ז״א

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

וכו׳..

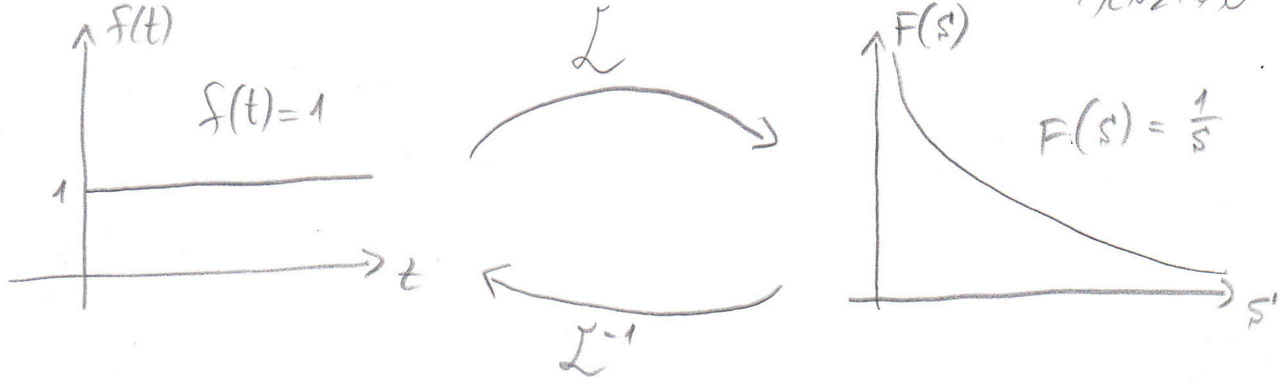
למשתנה t נהוג לקרוא משתנה הזמן (time)

" s " התדר (frequency)

המטרה היא לעבור ממד"ר שתלויה בזמן למשוואה במישור לפלס ולפי התכונות שנראה להתמרת לפלס, נגיע למשוואה לא דיפרנציאלית (אלגברית)

הערה: ההתמרה שמעבירה למישור התדר נקראת התמרת פורייה ואז s הוא מדומה טהור אז התמרת לפלס זהה להתמרת פורייה.

כדוגמא:



שאלה: האם לכל פונקציה קיימת התמרת לפלס?

תשובה: לא! נתבונן בפונקציה

$$f(t)=e^{t^2}$$

נרשום פורמלית:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{t^2-st}\,dt$$

האם קיים s עבורו האינטגרל מתכנס?

ננסה $s=0$

$$F(0)=\int_0^\infty e^{t^2}dt=\infty$$

נרצה להראות התבדרות לכל s, בתזכורת מאינפי:

למה: אם $\varphi(t)$ הינה פונקציה חיובית (למשל e^{t^2-st}!) ו-a,b ממשיים כך ש: $a\le b$ אזי

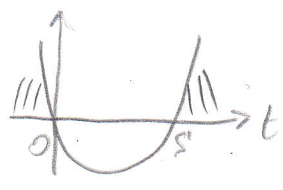
$$\int_a^\infty \varphi(t)dt \ge \int_b^\infty \varphi(t)dt$$

מסקנה:

$$\int_0^\infty e^{t^2-st}dt \ge \int_{\max(0,s)\ge 0} e^{t^2-st}dt \ge \int_{\max(0,s)}^\infty e^0\,dt=\int_{\max(0,s)}^\infty 1\,dt=\infty$$

מתי $t(t-s)=t^2-st>0$ פרבולה

חיובית כש: $t>s$ או $t<0$



$s>0$

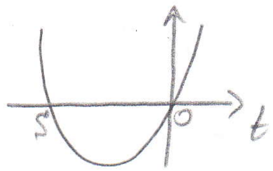
דף 3

$t > \max(0,s)$ בכל מקרה

$t^2 - st \geq 0$ אז

ולפי הלמה האי שוויון מוצדק

$s<0$



אין צורך להתייחס

$t \in (0,\infty)$

תכונות של התמרת לפלס:

א. לינאריות:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}(s) =$$
$$= \alpha F(s) + \beta G(s)$$

ב.

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = -F'(s)$$

ג. הכללה:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

נראה (למקרה פרטי נניח $n=2$):

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{t(t f(t))\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t f(t)\} =$$
$$= -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}F(s)\right] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}F(s) = (-1)^2 F^{(2)}(s)$$

גזירות:

ד.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s \cdot F(s) - f(0)$$

ה.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$$

ו. הכללה:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) =$$
$$= \boxed{s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)}$$

ז. אפנון (Modulation)

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$$

ח. הזזה:

$$\mathcal{L}\{f(t-c)\cdot H(t-c)\}(s) = e^{-cs}F(s)$$

בתכונה ח' מדברים על פונקציית Heaviside ע"ש Oliver Heaviside (אנגלי) המוגדרת באופן הבא:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

נקראת גם פונקציית מדרגה

פונקצית Heaviside המוזזת ב-c היא:

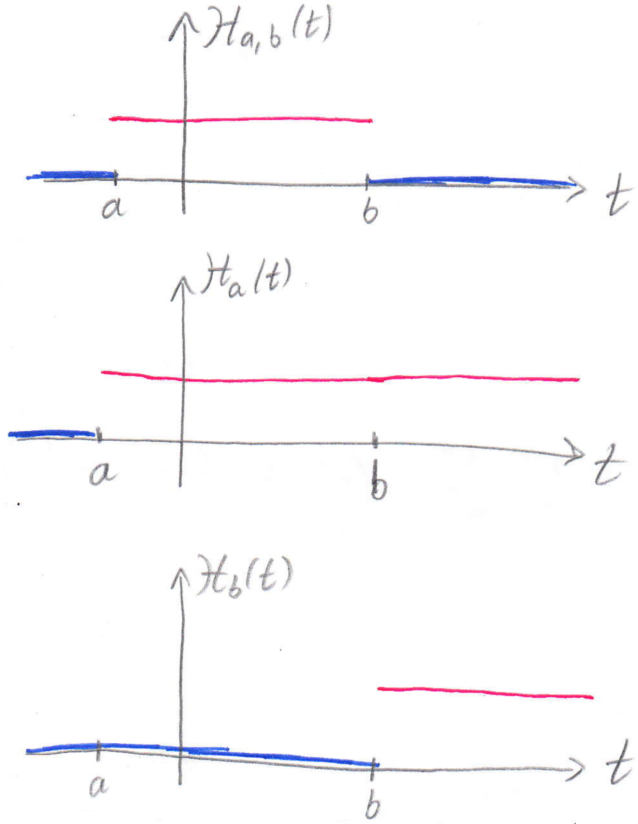
$$\mathcal{H}_c(t) = \mathcal{H}(t-c) = \begin{cases} 1 & t>c \\ 0 & t<c \end{cases}$$

מסמנים בנוסף פונ' Heaviside עם שני אינדקסים a,b

$$\mathcal{H}_{a,b}(t) := \begin{cases} 1 & a<t<b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \mathcal{H}_a(t) - \mathcal{H}_b(t) =$$

$$= \mathcal{H}(t-a) - \mathcal{H}(t-b)$$

הסבר:



חיסור גרפים

השימוש בפונק' Heaviside הוא כאשר $f(t)$ מוגדרת למקוטעין:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & a_1<t<b_1 \\ \vdots & \\ f_n(t) & a_n<t<b_n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן נוכל לרשום את f בצורה:

$$f(t) = f_1(t)\cdot\mathcal{H}_{a_1,b_1}(t) + f_2(t)\cdot\mathcal{H}_{a_2,b_2}(t) + \dots + f_n(t)\,\mathcal{H}_{a_n,b_n}(t)$$

הערה: גם התמרת לפלס ההפוכה, $\mathcal{L}^{-1}$, היא לינארית

הוכחה:

$$\alpha F(s)+\beta G(s) = \mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s) \quad / \mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\} = \alpha f(t)+\beta g(t) = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$