בוחן אמצע אלגברה לינארית 2

6.5.2015

מספר קורס: 88-113
מרצה:רוי עדין
זמן הבחינה:שעה וחצי

שאלה 1

נתונה המטריצה $M_n(\mathbb{Z}_7) \ni A_n = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 5 \\ 5 & \dots & \dots & 2 \end{pmatrix}$

א) מצאו את $\det(A_n)$.

ב) מצאו את $\det(A_{[illegible]})$. התשובה צריכה להיות איבר ב-$\mathbb{Z}_7$.

העזרו במשפט הקטן של פרמה: לכל p ראשוני ולכל a שלם, מתקיים $a^p \equiv a \pmod p$.

ג) לאילו ערכי n המטריצה A_n אינה הפיכה.

שאלה 2

הוכח $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I$

שאלה 3

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

א. מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים.

ב. מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$. (נמקו מדוע קיימת כזו).

ג. חשבו את A^{10}.

בס"ד

<u>פתרון נוסף לשאלה 1 סעיף א:</u>

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 2 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[i\neq 1]{R_1 + \sum R_i \to R_i} \begin{vmatrix} 5(n-1)+2 & 5(n-1)+2 & \cdots & 5(n-1)+2 \\ 5 & 2 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

נוסיף את כל השורות לשורה הראשונה

$$= (5(n-1)+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 2 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

(מוציאים גורם משותף מהשורה הראשונה)

$$\xrightarrow[i\neq 1]{R_i + 2R_1 \to R_i} = (5(n-1)+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 4 \end{vmatrix}$$

נוסיף לכל השורות את $2R_1$ (חוץ מהשורה הראשונה)

זוהי מטריצה משולשית עליונה ולכן נכפול את איברי האלכסון.

ולכן הדטרמיננטה המתקבלת שווה ל:

$$= (5(n-1)+2) \cdot 4^{n-1} =$$

$$= (5n-3) \cdot 4^{n-1} =$$

$$= (5n+4) \cdot 4^{n-1}.$$

פתרון שאלה 3:

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

פיתוח לפי שורה I

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\cdot[(\lambda-3)(\lambda-4)] - 3\cdot[0+(\lambda-3)] =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) - 3(\lambda-3) =$$

$$= (\lambda-3)[(\lambda-2)(\lambda-4) - 3] =$$

$$= (\lambda-3)[\lambda^2 - 4\lambda - 2\lambda + 8 - 3] =$$

$$= (\lambda-3)[\lambda^2 - 6\lambda + 5] =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3} \quad \boxed{\lambda_2 = 1} \quad \boxed{\lambda_3 = 5}$$

עבור $\lambda_1 = 3$:

$(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$x + z = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

$4z = 0 \Rightarrow \underline{z = 0}$

נסמן $y = t$ ונקבל:

$V_{\lambda_1=3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ נציג הוא: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = 1$:

$(A - \lambda_2 I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ \text{נסמן } z = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = t \\ y = 0 \\ x = -3t \end{matrix}$$

$(x = -3t)$

לכן: $V_{\lambda_2=1} = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ נציג הוא: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{R_2}{-2} \to R_2]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 3R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

נסמן: $z = t$

$x = t$

$V_{\lambda_3=5} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ הנציג הוא: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ 0 & & 5 \end{pmatrix}$$

קיבלנו 3 ע"ע שונים ולכן המטריצה לכסינה (לפי משפט).

ב.

$$A^{10}=PD^{10}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 3^{10} & & \\ & 1^{10} & 0 \\ 0 & & 5^{10} \end{pmatrix}P^{-1}$$

נחשב את P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+3R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_3}{4} \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

נוודא שזה נכון:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$