מתמטיקה בדידה – תרגיל 3

שאלה 1

תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו כי $A\times B = B\times A$ אם ורק אם $A = B$ או $A = \phi$ או $B = \phi$.

פיתרון: אם $A = \phi$ או $B = \phi$ אז $A\times B = B\times A = \phi$, ואם $A = B$ אז $A\times B = B\times A = A\times A$. כלומר, צד שמאל גורר את צד ימין.

נניח שצד ימין נכון. נפרק זאת לשני מקרים: מקרה ראשון ש $A = \phi$ או $B = \phi$, והמקרה השני ששתי הקבוצות אינן ריקות. במקרה הראשון צד שמאל מתקיים אוטומטית. נניח אם כך שמדובר במקרה השני. יהיו $a\in A$ ו $b\in B$. אזי $(a,b)\in A\times B$. בגלל ש$A\times B = B\times A$, $(a,b)\in B\times A$, ולכן $a\in B$ וגם $b\in A$. מכיוון שלא הנחנו דבר על a פרט לכך ש $a\in A$ וקיבלנו $a\in B$, ישנה הכלה $A\subseteq B$. מכיוון שלא הנחנו דבר על b פרט לכך ש $b\in B$ וקיבלנו $b\in A$, ישנה הכלה $B\subseteq A$, ולכן $A = B$.

שאלה 2

הוכח או הפרך: אם $A\supseteq B$ אז $(A\times A)\setminus(B\times B)=(A\times(A\setminus B))\cup((A\setminus B)\times A)$.

פיתרון:

$$
\begin{aligned}
&(x,y)\in(A\times A)\setminus(B\times B)\Leftrightarrow((x,y)\in(A\times A))\wedge((x,y)\notin(B\times B))\\
&\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(\neg((x\in B)\wedge(y\in B)))\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(y\in A)\wedge((x\notin B)\vee(y\notin B))\\
&\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(x\notin B))\vee((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(x\notin B))\\
&\Leftrightarrow((x\in A\setminus B)\wedge(y\in A))\vee((x\in A)\wedge(y\in A\setminus B))\Leftrightarrow((x,y)\in A\times(A\setminus B))\vee((x,y)\in(A\setminus B)\times A)
\end{aligned}
$$

שאלה 3

תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

א. $A\subseteq B$

ב. $A\in P(B)$

ג. $P(A)\subseteq P(B)$

פיתרון: א. שקול לב. לפי הגדרת קבוצת החזקה $P(B)$, דהיינו הקבוצה שאיבריה הם בדיוק תת-הקבוצות של B.

א. גורר ג., בגלל שאם $X\in P(A)$ אז $X\subseteq A$ ומכיוון ש $A\subseteq B$, מתקיים $X\subseteq B$ ולכן $X\in P(B)$.

ג. גורר ב., משום שאם $P(A)\subseteq P(B)$ אז בגלל ש $A\in P(A)$, מתקיים $A\in P(B)$.

שאלה 4

תהיינה A, B קבוצות סופיות. נגדיר $n = |A|, m = |B|, k = |A \cap B|$. הביעו בעזרת n, m, k את גודלן של הקבוצות הבאות. נמקו את קביעתכם.

1. $A \cup B$
2. $P(A) \Delta P(B)$
3. $(A \cap B) \times (B \cup A)$
4. $(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}) \times B$
5. $\left(P(A) \times P(B)\right) \cup \left(P(A \cup B) \times P(A \cap B)\right)$

פיתרון:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + m - k$ משום שכאשר סופרים את האיברים של A ואז את האיברים של B אז בעצם סופרים את האיברים בחיתוך פעמיים, וכדי לקבל את מספר האיברים באיחוד צריך להפחית מהסכום את מספר האיברים בחיתוך.
2. באופן דומה ל1, $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = n + m - 2k$ כי האיברים בחיתוך נספרו פעמיים, וכלל לא רוצים לכלול אותם, אז מפחיתים פעמיים את מספר איברי החיתוך. במקרה של קבוצות החזקה $|P(A) \Delta P(B)| = |P(A)| + |P(B)| - 2|P(A) \cap P(B)|$. כעת, קבוצה היא תת-קבוצה גם של A וגם של B אם ורק אם היא תת-קבוצה של החיתוך,
ולכן $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$. כלומר,
$|P(A) \Delta P(B)| = |P(A)| + |P(B)| - 2|P(A \cap B)| = 2^n + 2^m - 2 \cdot 2^k = 2^n + 2^m - 2^{k+1}$.
3. $|(A \cap B) \times (B \cup A)| = |A \cap B| \cdot |B \cup A| = k(n + m - k)$.
4. $|(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}|) \times B| = |P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}| \cdot |B| = (2^n - 2)m$.
5. $$|(P(A) \times P(B)) \cup (P(A \cup B) \times (P(A \cap B))| =$$
$$|P(A) \times P(B)| + |P(A \cup B) \times (P(A \cap B)| - |(P(A) \times P(B)) \cap (P(A \cup B) \times (P(A \cap B))|$$.

כעת, $|(P(A) \times P(B)) \cap (P(A \cup B) \times (P(A \cap B))| = |P(A) \times P(A \cap B)| = 2^n \cdot 2^k = 2^{n+k}$, משמע
$|(P(A) \times P(B)) \cup (P(A \cup B) \times (P(A \cap B))| = 2^{n+m} + 2^{n+m-k} \cdot 2^k - 2^{n+k} = 2^{n+m+1} - 2^{n+k}$.