

תבנית 2 הערכות

(7)

שורש n-ים של מספר מרוכב: מורה n-י

של מספר מרוכב z הוא מספר מרוכב w

כך ש- $w^n = z$ ורשמים $w = \sqrt[n]{z}$ אם

X

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ קוטבית

זכור! $w^n = z$ יש n ערכים שונים

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right)$$

כאשר $k = 0, 1, \dots, n-1$

דוגמה: $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$

הערכות: $z = 4\sqrt{3}-4i$ קוטבית

$$z = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 8 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

$\theta = 5$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi k}{3} \right) \right)$$

יש 3 ערכים, $k = 0, 1, 2$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right), k = 0$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18} \right), k = 1$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{35\pi}{18} + i \sin \frac{35\pi}{18} \right), k = 2$$

דוגמה: $\sqrt[4]{1+i}$

יש 4 ערכים, $z = 1+i$

$$z = 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) \right) \quad (2)$$

כאשר $k = 0, 1, 2, 3$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi + 8\pi k}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 8\pi k}{16}\right) \right) \quad X$$

כאשר $k = 0, 1, 2, 3$

טורים אינסופיים של מספרים מרוכבים
 הנתונים: אומרים מספר אינסופי של מספרים
 מרוכבים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לקדו $z \in \mathbb{C}$ אם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

הצורה אומרים שהטור האינסופי של מספרים מרוכבים

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

התקיים $W_k = \sum_{n=1}^k z_n$ מתכנסת לקדו l .

אומרים שהטור האינסופי של מספרים מרוכבים

מתכנסת לקדו l אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס.

משפט: אם טור מתכנס בהחלט אז קדו הטור מתכנס.

משפט: קדו הטור מתכנס בהחלט אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$.

דוגמאות

מציאו את האיברים של סדרה הטורים הבאים

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz^2}$ מתכנסים.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n}$ ($z \neq -1$), 5. $\sum_{n=1}^{\infty} n! (e^z - 1)^n$

תרגול 3 טרנספורמטציות
 פונקציות האקספוננט והפונקציות הטריגונומטריות
 הטרנספורמטציות המרוכבות $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
 הטרנספורמטציות המרוכבות

(Y)
X

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
 פונקציה זו ניתנת לפרש את הפונקציות
 הטריגונומטריות המרוכבות

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

לדוגמה: המשוואה $e^z = 1 - e^{-z}$ כאשר $z = 2i\pi k$

או $\sin z = 0 - e^{-z}$ כאשר $z = \pi k$

במקרה: $e^z = 1 - e^{-z}$ או $z = x + iy$ אז
 $e^x(\cos y + i \sin y) = 1 - e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

אם $e^x = |e^x| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = |1| = 1$

אם $x = 0$ אז $\cos y + i \sin y = 1 - e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

המשוואה $\cos y = 1 - e^{-x} \cos y$ או $\sin y = 0$

המשוואה $\cos y = 1$ או $\sin y = 0$ כאשר $y = 2\pi k$ או $y = \pi k$ (כאשר $k \in \mathbb{Z}$)

אם $z = 0 + i(2\pi k) = 2\pi i k$

אם $e^{iz} = e^{-iz}$ אז $\sin z = 0 - e^{-z}$

$e^{2iz} = 1$ או $2iz = 2\pi i k$ או $z = \pi k$ (כאשר $k \in \mathbb{Z}$)

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

2

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

X

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) \\ &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \cos x - i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \sin x = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x = 2, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = 0$$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

הצורה הכללית של $\cos z = 2$ היא $z = 2k\pi$ או $z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$