תרגיל 6 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$$

(ב)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2}\mathrm{d}z$$

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת כי $|f(z)| \le M|z|^n$ עבור $M > 0$ כלשהוא.
הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה n לכל היותר.
רמז: חזרו על ההוכחה של משפט ליוביל.

3. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול $\{z \mid |z| \le 1\}$
הדרכה: כתבו $z = x + iy$ (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).

4. תהי $f(z)$ אנלטית בעיגול היחידה (כלומר ב $\{z \mid |z| < 1\}$) עם התכונה שלכל z כך ש $0 < |z| < 1$ מתקיים ש $|f(z)| \le \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס.

5. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z-a| = R\}$. f כמובן חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \le M$ לכל z כך ש $|z-a| = R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{M \cdot n!}{R^n}$$