משפטי סילו

תוצאות מסילו 1

1) נניח $p^n \mid |G|$ (p ראשוני, $n\in\mathbb{N}$). אזי לכל $0\le k\le n$, קיימת ת"ח p מסדר p^k.

<u>הסבר</u>: נניח $|G|=p^t m$ כאשר $(p,m)=1$.
בחר ש- $n\le t$.
לפי סילו 1 יש ת"ח p-סילו $\underline{P}$ כך ש- $|P|=p^t$
ממשפט על חבורות p לכל $0\le k\le t$ קיימת ת"ח $H\le \underline{P}$
$|H|=p^k$, ולכן $H\le G$.

2) משפט קושי:
תהי G חבורה סופית $p \mid |G|$ (p ראשוני). אזי יש $a\in G$ שסדרו $o(a)=p$.

משפט סילו 2

תהי חבורה G סופית $|G|=p^n m$, p ראשוני $(p,m)=1$. אזי
א) כל ת"ח p $H\le G$ מוכלת בת"ח p סילו.
ב) כל ת"ח p סילו צמודות.

הוכחה

א) נניח $p^k=|H|$, $k\ge 1$, ונזכיר שאם $\underline{P}\in Syl_p(G)$, אז
לכל $g\in G$: $g\underline{P}g^{-1}\in Syl_p(G)$ (כי הצמדה אוטומורפיזם).
לכן יש פעולת הצמדה $G\times Syl_p(G)\to Syl_p(G)$, $(g,\underline{P})\mapsto g\underline{P}g^{-1}$
ומסילו 1 $\underline{P}\in Syl_p(G)\neq\emptyset$, ומוגדרת פעולה
$G\curvearrowright G/\underline{P}$
$G\times G/\underline{P}\to G/\underline{P}$, $(g,t\underline{P})\mapsto (gt)\underline{P}$ ויש מסילו 1.
ודאי שמוגדרת פעולת הצמצום $H\times G/\underline{P}\to \underline{P}$
אבל הפעם אין הכרח שיהיה מסילו 1.
$p^k=|H|$ ולכן נשתמש בטענה לפיה לכל $H\times X\to X$ עבור H p-חבורה
$|F|\equiv|X| \bmod p$, במקרה כזה $|F|\equiv|G/P| \bmod p$
$|F|\equiv m \bmod p$
$(m,p)=1 \Rightarrow m\not\equiv 0 \bmod p \Rightarrow |F|\not\equiv 0 \bmod p$
ולכן יש נקודת שבת $g\underline{P}=:x\in G/\underline{P}$

נקבל $h(gP)=gP \quad \forall h\in H$

$g^{-1}hgP=P$

$g^{-1}hg\in P$

$\exists g\in G;\ \forall h\in H: \quad h\in gPg^{-1}\in Syl_p(G)$

$H\le gPg^{-1}$

בד מוכח (א) וגם (ב) לכן $H:=P_1\in Syl_p(G)$

$P_1\le gPg^{-1}$

ובפרט אחד יש רק אוקרום לכן $P_1=gPg^{-1}$

משפט סילו 3

תהי G כנ"ל, $|G|=p^n m$ $\quad (p,m)=1$

א. מספר $n_p=[G:N(P)]$ ת"ח p סילו.

ב. $n_p\equiv 1 \mod p$

ג. $n_p | m$

הוכחה

א. לפי סילו 2 הפעולה $G\times Syl_p(G)\longrightarrow Syl_p(G)$ המוגדרת ע"י הצמדות יש מסלול אחד!

לפי נוסחה של גודל המסלול $|[x]|=[G:G_x]$

נציב ונקבל $n_p=|[P]|=[G:G_P]=[G:N(P)]$

ב. ניקח את צמצום הפעולה $P\times Syl_p(G)\to Syl_p(G)$ ע"י הצמדות

לפי משפט f נק' שבת

$n_p=|Syl_p(G)|\equiv|F| \mod p$

נוכיח $|F|=1$. $P\in F$ לכן $|F|\ge 1$.

קח נניח $Q\in F$, צ"ל $Q=P$.

$Q\le N(P),\ P\le N(Q) \Leftarrow \forall g\in P \quad gQg^{-1}=Q$

ואז שני ת"ח p סילו של $N(Q)$, לכן לפי סילו 2 P,Q צמודות

ב-$N(Q)$: $\exists t\in N(Q): P=tQt^{-1}=Q$

לכן $|F|=1$ כנדרש

$$m=[G:P]=[G:N(P)][N(P):P]=n_p[N(P):P]$$

ולכן $n_p|m$

הערה

$$[N(P):P]=\frac{m}{n_p}$$

משפט ברנסייד

תהי פעולה $G\times X\to X$ של חבורה סופית G על קבוצה סופית X, מס' המסלולים יהיה

$$k=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$$

הוכחה:

שלב א נוכיח ש: $\sum_{x\in X}|G_x|=\sum_{g\in G}|X_g|$

נגדיר פונקציה $f: G\times X\to\{0,1\}$

$$f(g,x)=\begin{cases}1 & g*x=x\\ 0 & else\end{cases}$$

וניצור טבלה של נקודות שבת.

f	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$e=g_1$	1	1		1
g_2	0	1	$\dots$	0
$\vdots$				
g_n				

למשל

וסכ' שורות = וסכ' עמודות $\Longrightarrow$ $\sum_{g\in G}|X_g|=\sum_{x\in X}|G_x|$ כנדרש.

שלב ב: נוכיח נוסחת ברנסייד, שקול להוכיח $\sum_{x\in X}|G_x|=k|G|$

$$\sum_{x\in X}|G_x|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{y\in[x_i]}|G_y|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{y\in[x_i]}\frac{|G|}{|[y]|}=\sum_{i=1}^{k}\frac{|G|}{|[x_i]|}|[x_i]|=k|G|$$

כאשר $x_1,\dots,x_k$ נציגים של מסלולים

כנדרש!

הערות נוספות על הוכחת פתירות

1) הגדרה

תהא G חבורה G אם $a,b\in G$ הקומוטטור יהיה

$$[a,b]:=aba^{-1}b^{-1}$$

תכונות של קומוטטור:

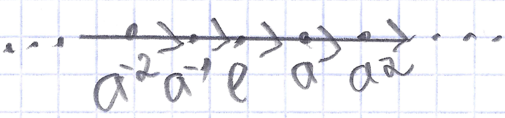
* $ab=ba \iff [a,b]=e$
* $[a,b]^{-1}=[b,a]$
* $g[a,b]g^{-1}=[gag^{-1},gbg^{-1}]$
* $G':=\langle [a,b] \mid a,b\in G\rangle \trianglelefteq G$. $G'=\{e\}$ אמ"מ G אבלית.
* G/G' אבלית.
* הכללה: עבור $N\trianglelefteq G$, אז G/N אבלית $\iff$ $N\supseteq G'$.
* G פתירה $\iff$ קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G^{(n)}=\{e\}$, כאשר $G^{(n)}=(G^{(n-1)})'$

חבורה חופשית (קבוצת יוצרים ויחסים)

דוגמאות

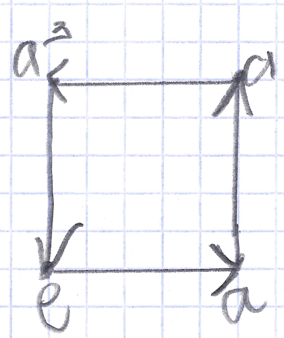
1) עבור $G=\langle a\rangle$ ציקלית:

אינסופית. $G=\langle a\mid \emptyset\rangle$ אין יחסים



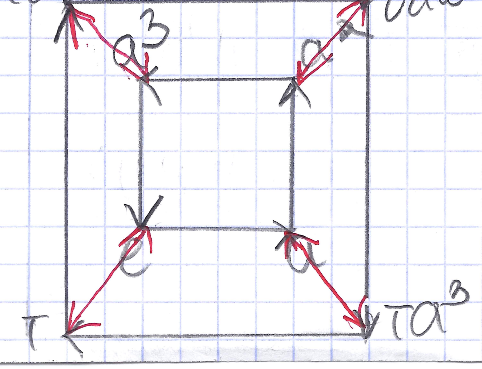
סופית עם n איברים $G=\langle a\mid a^n=e\rangle$

עבור $n=4$ הגרף יהיה



2) עבור $D_n=\langle \sigma,\tau \mid \sigma^n=e,\ \tau^2=e,\ \sigma\tau=\tau\sigma^{-1}\rangle$ $(a:=\sigma)$

עבור $n=4$



בניה של גרף קיילי של חבורה $G=\langle \underset{\text{יוצרים}}{S} \mid \underset{\text{יחסים}}{R} \rangle$:

1) הקודקודים הם איברים של G.

2) לכל $s\in S$ יהיה צבע

3) $x \xrightarrow{a} xa$

הגדרה

חבורה חופשית היא חבורה מהצורה $\langle S \mid \emptyset \rangle$ או $\langle S \mid \text{יחסים טריוויאלים} \rangle$

ונסמן $F(S)$

דוגמא

א. $F(a)=\langle a \mid \emptyset\rangle \simeq \mathbb{Z}$

ב. $F(a,b):=\langle a,b \mid \emptyset\rangle$ מילים מהתווים $\{a,b\}$.

תכונות

1) לכל חבורה $G=\langle S \mid R\rangle$ קיים אפימורפיזם טבעי

$$F(S)\longrightarrow G$$

$$s_1^{k_1}s_2^{k_2}\cdots s_t^{k_t}\mapsto s_1^{k_1}\cdot s_2^{k_2}\cdots s_t^{k_t}$$

2) $G_1=\langle S \mid R_1\rangle$, $G_2=\langle S \mid R_2\rangle$, $R_1\subseteq R_2$. אזי קיים אפימורפיזם

$$G_1\to G_2$$

3) חבורה חופשית אבלית.

$$A(S)=\langle S \mid \forall x,y\in S:\ xy=yx\rangle$$

ולכל $G=\langle R \mid S\rangle$ אבלית קיים אפימורפיזם

$$f: A(S)\to G$$

דוגמא

$$\mathbb{Z}^2 \simeq A(a,b)=\langle a,b \mid ab=ba\rangle$$

$$\mathbb{Z}^n \simeq A(a_1,\dots,a_n)$$

תרגיל

הוכח שכל חבורה אבלית סופית $\simeq \mathbb{Z}^n/H$.

פתרון

$\langle a_1,\dots,a_n \mid R\rangle$ אבלית לכן $a_i+a_j=a_j+a_i$. ומהמשפט איזו׳

ראשית: $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} G$ אפי׳ ע״י $\sum_{i=1}^n c_ie_i=(c_1,\dots,c_n)\mapsto\sum_{i=1}^n c_ia_i$