פתרון לינארית 2 תשפ"ג סמסטר ב מועד ב

מרצים: ד"ר עדי בן צבי, אריאל ויצמן.
מתרגלים: אריאל ויצמן, נעה כהן, כנה נהיר, אלעד עטייא, גלעד פורת קורן, ניר שרייבר.
יש לענות על **כל** שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 104 נק'. אין חומר עזר.
זמן הבחינה: 3 שעות.
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר. יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. (15 נק') יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, ויהי B בסיס סדור לV. הוכיחו: λ הוא ע"ע של T אם ורק אם λ הוא ע"ע של $[T]_B^B$.

2. נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(א) (6 נק') מצאו בסיס או"נ B ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $[T]_B^B=D$.

(ב) (7 נק') מצאו את הוקטור ב$\ker T$ הכי קרוב ל $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

פתרון:

א. נשים לב שהבסיס הנתון מלכסן. עוד נשים לב שו"ע של ע"ע שונים כאן הינם או"ג, לכן נותר: לעשות גראם-שמידט על הבסיס למרחב העצמי של 0 (שני אלה שנשלחים לאפס), ולנרמל.

ב. מסעיף קודם כבר יש לנו בסיס או"נ לגרעין, וצריך לחשב את ההיטל עליו.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, ומטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $P_A(B)=0$ אז גם B לכסינה.

הפרכה:

למשל לקחת

$$A=I,B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

כמובן, A כבר אלכסונית, B לא לכסינה כי היא בלוק ז'ורדן בגודל 2.

(ב) לכל מטריצות $A,B\in\mathbb{C}^{2\times2}$ המטריצה $C=AB-BA$ מקיימת: אם C לא נילפוטנטית אז היא לכסינה.
הוכחה:
נשים לב:

$$tr(C)=tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש $tr(AB)=tr(BA)$. כעת, אם היא לא נילפוטנטית זאת אומרת שיש ערך עצמי שונה מאפס ולכן גם המינוס ערך עצמי, וקיבלנו שני ערכים עצמיים שונים, לכן לכסינה.

(ג) אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$, אז קיים $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ כך ש $Av=3v$.
הפרכה:
למשל $A=-2I$. כאן -2 – ע"ע יחיד (אגב, ככה זה בכל סקלארית).

(ד) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים: אם v וקטור עצמי של A אז v וקטור עצמי של A^{-1}.
הוכחה:
יהי v ו"ע, לכן יש $\lambda\neq0$ (שונה מאפס כי הפיכה) כך ש $Av=\lambda v$, ולכן:

$$v=Iv=A^{-1}Av=A^{-1}\lambda v$$

אפשר כעת לחלק בλ ולקבל:

$$\lambda^{-1}v=A^{-1}v$$

ולכן הוא ו"ע.

4. (10 נק') תהא $A\in\mathbb{R}^{9\times9}$ המקיימת: $A^3=0$ ובנוסף $\text{rank}\left(A^2\right)=2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.
פתרון:
משני הנתונים יחד מקבלים $A^3=0, A^2\neq0$ ולכן

$$m_A(x)=x^3$$

ולכן הבלוק הגדול בגודל 3. נשים לב שכאשר מעלים בלוק ז'ורדן של 0 בריבוע הדרגה יורדת ב1, ומכיון שהדרגה של מטריצות דומות זהה, נקבל שעבור צורת ז'ורדן J מתקיים:

$$rank(J^2)=2$$

בלוקים מסדר 1 או 2 בריבוע מתאפסים, לכן צריך שני בלוקים מסדר 3. בסה"כ יש שתי צורות:

$$3,3,2,1$$

$$3,3,1,1,1$$

5. הגדרה: מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא <u>סימטרית חיובית</u> אם A סימטרית ובנוסף מתקיים: אם λ ע"ע של A אז $\lambda>0$.

(א) (8 נק') הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: המטריצה M^tM סימטרית חיובית.
פתרון:
סימטרית:

$$\left(M^tM\right)^t=M^t\left(M^t\right)^t=M^tM$$

חיובית: יהי λ ע"ע של M^tM, לכן יש ו"ע $v \neq 0$ מנורמל (כי תמיד אפשר להכפיל בסקלאר ויישאר ו"ע) כך ש $M^tMv = \lambda v$, ולכן:

$$\lambda = \lambda\|v\| = \lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \left\langle M^tMv, v\right\rangle = \langle Mv, Mv\rangle > 0$$

המעבר האחרון נובע מהפיכות M.

(ב) (9 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B = M^tM$.

פתרון:

B סימטרית ולכן לכסינה או"ג: קיימת U או"ג (אוניטרית ממשית) כך ש

$$U^tBU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

כאשר $\lambda_i > 0$ לכל i. נסמן:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$B = UDU^t = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^t$$

לכן עבור $M = \sqrt{D}U^t$ מתקיים:

$$M^tM = \left(\sqrt{D}U^t\right)^t\sqrt{D}U^t = U\sqrt{D}^t\sqrt{D}U^t = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^t = B$$

(ג) (7 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: P^tBP סימטרית חיובית.

פתרון:

תהא P הפיכה. לפי סעיף קודם יש M הפיכה כך ש $B = M^tM$, ולכן:

$$P^tBP = P^tM^tMP = (MP)^t MP$$

וכפי שהוכחנו בסעיף א $(MP)^t MP$ סימטרית חיובית (כמובן MP הפיכה).

(ד) (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $P^tAP = I$.

פתרון:

קיימת U או"ג כך ש

$$U^tAU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

כאשר $\lambda_i > 0$ לכל i. נסמן:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

הפיכה. ניקח $P = UQ$ ונקבל:

$$P^t AP = (UQ)^t AUQ = QU^t AUQ = QDQ = I$$

דרך נוספת שלמדתי מסטודנטים: לפי סעיפים קודמים יש M הפיכה כך ש $A = M^t M$, ניקח $P = M^{-1}$ ונקבל:

$$P^t AP = \left(M^{-1}\right)^t M^t \underbrace{MM^{-1}}_{=I} = \left(M^t\right)^{-1} M^t = I$$

(ה) <u>בונוס</u> 4 נק' (מעבר ל104 נק' של שאר המבחן): תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות סימטריות חיובית, ותהי $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $P^t AP = I$. הוכיחו:

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$$

הדרכה: הוכיחו תחילה שמתקיים

$$\det\left(I + P^t BP\right) \geq \det(I) + \det\left(P^t BP\right)$$

בהצלחה!!

שאלה 1: (15 נק') יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי B בסיס סדור לV. הוכיחו: λ הוא ע"ע של T אם ורק אם λ הוא ע"ע של $[T]_B^B$.

<u>פתרון שאלה 1:</u>

המשך פתרון שאלה 1

<u>שאלה 2:</u> נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס או"נ B ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $[T]_B^B=D$.

ב. (7 נק') מצאו את הוקטור ב$\ker T$ הכי קרוב ל $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

<u>פתרון שאלה 2:</u>

המשך פתרון שאלה 2

<u>שאלה 3:</u> הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

א. אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, ומטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $P_A(B) = 0$ אז גם B לכסינה.

ב. לכל מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ המטריצה $C = AB - BA$ מקיימת: אם C לא נילפוטנטית אז היא לכסינה.

ג. אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$, אז קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = 3v$.

ד. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים: אם v וקטור עצמי של A אז v וקטור עצמי של A^{-1}.

<u>פתרון שאלה 3:</u>

המשך פתרון שאלה 3

המשך פתרון שאלה 3

<u>שאלה 4:</u> (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ המקיימת: $A^3 = 0$ ובנוסף $\operatorname{rank}\left(A^2\right) = 2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

<u>פתרון שאלה 4:</u>

המשך פתרון שאלה 4

המשך פתרון שאלה 4

שאלה 5: הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא סימטרית חיובית אם A סימטרית ובנוסף מתקיים: אם λ ע"ע של A אז $\lambda > 0$.

א. (8 נק') הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: המטריצה M^tM סימטרית חיובית.

ב. (9 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B = M^tM$.

ג. (7 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: P^tBP סימטרית חיובית.

ד. (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $P^tAP = I$.

ה. **בונוס** 4 נק' (מעבר ל104 נק' של שאר המבחן): תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות סימטריות חיוביות, ותהי $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $P^tAP = I$. הוכיחו:

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$$

הדרכה: הוכיחו תחילה שמתקיים

$$\det\left(I + P^tBP\right) \geq \det\left(I\right) + \det\left(P^tBP\right)$$

פתרון שאלה 5:

המשך פתרון שאלה 5

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___