

## תרגיל בית 3 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית 88-373 סמסטר ב' תשפ"א

### תוחלת ושונות

**תרגיל 1.** יהי  $X$  משתנה מקרי עם פונקציית התפלגות מצטברת  $F_X$ . כזכור,  $F_X$  רציפה מימין בכל נקודה. הוכיחו:  $P(X = a) = 0$  אם ורק אם  $F_X$  רציפה ב- $a$ .  
לפני שתענו על השאלה הבאה, קראו על מידת סטילטיס בקישורים שבעמוד הקורס.

**תרגיל 2.** יהי  $X$  משתנה מקרי עם פונקציית התפלגות מצטברת

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^t, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

חשבו את ההסתברויות ואת התוחלות הבאות:

א.  $P(X \geq 1)$

ב.  $P(0 \leq X \leq 1)$

ג.  $\mathbb{E}[X]$

ד.  $\mathbb{E}[X | X \leq 0]$

**תזכורת.** פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת **קמורה** (convex), אם לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  ו- $0 \leq \lambda \leq 1$  מתקיים

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

מבחינה גרפית: המשיק לפונקציה תמיד נמצא מתחת לפונקציה. אם  $f$  גזירה פעמיים ו- $f''(x) \geq 0$  אז  $f$  היא קמורה.

**תרגיל 3.** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  מרחב הסתברות, יהי  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  משתנה מקרי, ותהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה קמורה. בשאלה זו נוכיח את אי-שוויון ינסן.

א. הוכיחו שלכל  $x \in \mathbb{R}$  קיימות הנגזרות החד-צדדיות

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ו-} \quad f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ב. הוכיחו שלכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .

ג. יהי  $t \in \mathbb{R}$ . הראו שקיימים  $a, b \in \mathbb{R}$  שעבורם  $f(x) \geq ax + b$  לכל  $x \in \mathbb{R}$  וגם  $f(t) = at + b$ .

ד. הסיקו את אי-שוויון ינסן:  $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$ .

## ריכוז מידה

**תרגיל 4.** הראו כי אי-שוויון מרקוב ואי-שוויון צ'בישב הם הדוקים. כלומר, לכל  $a \in \mathbb{R}$ :

א. מצאו משתנה מקרי אי-שלילי  $X$  כך ש- $P(X \geq a) = \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$ .

ב. מצאו משתנה מקרי  $X$  עם שונות סופית כך ש- $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$ .

(אם המשתנים שלכם מקבלים יותר משלושה ערכים, אפשר למצוא דוגמה יותר פשוטה.)

**תרגיל 5.** הוכיחו את אי-שוויון קנטלי: אם  $X$  משתנה מקרי בעל שונות סופית, אז לכל  $\lambda > 0$ ,

$$P(X - \mathbb{E}[X] \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X) + \lambda^2}$$

(רמז:  $X - \mathbb{E}[X] \geq \lambda$  אם ורק אם  $X - \mathbb{E}[X] + t \geq \lambda + t$  לכל  $t \in \mathbb{R}$ .)

**תרגיל 6** (בעיית אוסף הקופונים). בכל יום גדי מגריל ספר מהספרייה של המחלקה, שכידוע מכילה בדיוק  $n$  ספרים. כיוון שהוא כל כך אוהב את כל תחומי המתמטיקה ועוד לא בחר תחום התמחות, הוא בוחר בכל יום ספר באופן אחיד וקורא אותו. לפעמים יוצא שהוא בוחר ספר שהוא כבר קרא, אבל הוא קורא אותו שוב, למה לא.

א. הראו שתוחלת כמות הימים עד שגדי יקרא את כל הספרים בספרייה היא בקירוב טוב  $n \log n$ .

ב. הראו שאם  $X$  היא כמות הימים עד שהוא יקרא את כל הספרים, מתקיים

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha n) \leq \frac{c}{\alpha^2}$$

בהצלחה וחג שמח!